

2011 Ⅱ

No.

Date

実数の組 (x, y, z) で、どのようは整数 l, m, n に対して等式
 $l \cdot 10^{xy} - n \cdot 10^{yz} + l \cdot 10^{yz} + m \cdot 10^{xz} = 13l + 36m + n$
が成り立つものを探して求めよ。

2011年の問題は、

大抵の達人で言う「鬼」モードです。

② (1) 解寸

(2) うーん

(3) あ、でも 1 けるかも

③ (1) OK

(2) ムリ

(3) ムリ

某大手予備校の評価を見ると、

①は解かなくてダメかもしれないね。

①は、解法を知らなければ無理ですが、

頭をオーバーヒートさせれば頑張る下す。

制限時間は 45 分です。

2011 Ⅳ (解答)

No.

Date

等式 $l \cdot 10^{4x} - n \cdot x + l \cdot 10^{4z} + m \cdot 10^{xz} = 13l + 36m + n^2 - \text{①}$ x^4
 どのよう整数 l, m, n に対しても成り立つ時,
 $(l, m, n) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ の時も成り立つ。
 したがって, ①に代入して

$$\begin{cases} 10^{4x} + 10^{4z} = 13 & \text{--- ②} \\ 10^{xz} = 36 & \text{--- ③} \\ -x = y & \text{--- ④} \end{cases}$$

②④より $10^{2x} + 10^{-x-z} = 13$ --- ⑤
 $10^x = X > 0, 10^z = Z > 0$ とおくと, ②④より

$$\begin{cases} \frac{X}{Z} = 36 & \text{--- ⑥} \\ X^2 + \frac{1}{XZ} = 13 & \text{--- ⑦} \end{cases}$$

⑥⑦より $X^2 + \frac{36}{X^2} = 13 \iff X^4 - 13X^2 + 36 = 0$

$$\iff (X+2)(X-2)(X+3)(X-3) = 0$$

$X > 0$ より $X = 2, 3$

(i) $X = 2$ のとき ⑥より $Z = \frac{1}{18}$

$\therefore (x, y, z) = (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18)$

(ii) $X = 3$ のとき ⑥より $Z = \frac{1}{2}$

$\therefore (x, y, z) = (\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12)$

逆に, ②, ③, ④が成立する時, 任意の整数 l, m, n に対して
 明らかに ①は成立するから求める答えは

$$(x, y, z) = (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18)$$

$$, (\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12)$$