

問題(1987年大阪大学)

袋の中に赤球が a 個、白玉が b 個入っている。この袋から無作為に1個の玉を取り出し、その色を記録して袋に戻す。この操作を繰り返し、同じ色の玉が2回続けて出るか、または試行の回数が $2N$ に達した時、試行をやめる。ただし、 N は2以上の一定の自然数とする。この試行がちょうど k 回で終わる確率を p_k ($k = 2, 3, \dots, 2N$)とし、 $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$, $r = pq$ とおく。

(1) P_{2l}, P_{2l+1} ($l = 1, 2, \dots, N-1$) および P_{2N} を r を用いて表せ。

(2) 試行の回数の期待値 $E = \sum_{k=2}^{2N} kP_k$ は、定数 A, B を用いて

$E = A + B(r + r^2 + \dots + r^{N-1})$ と表せることを示し、 A, B を求めよ。

(3) $E < 3$ を示せ。