

問題

$$f(x) = \frac{1}{5} \cos x \text{ とする.}$$

(1) $x = f(x)$ はただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ.

(2) 任意の x, y に対して $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{5} |x - y|$ が成り立つことを示せ.

(3) 任意の a に対し、 $a_0 = a, a_n = f(a_{n-1})$ ($n \geq 1$) で定められる数列 $\{a_n\}$ は $x = f(x)$ の解に収束することを示せ.