

問題

$\angle X_2 O X_1 = \frac{\pi}{6}$ となるような半直線 $O X_1$ ,  $O X_2$ を考える。

$O P_1 = L$ となる点 $P_1$ をとる。ただし $L$ は正の定数とする。

この点 $P_1$ から $O X_1$ に垂直となる直線を引き、 $O X_2$ との交点を点 $Q_1$ とする。

その点 $Q_1$ から、 $\angle O Q_1 P_1$ の角の二等分線を引き、 $O X_1$ との交点を $P_2$ とする。

この操作を繰り返した時、 $\triangle P_n Q_n P_{n+1} = S_n$ と置いて、 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。