基礎微積〜積分編〜
おまけ 2「n 次元円の体積について考えてみよう」

$V_n(r)$ を半径 r の n 次元円の体積とする。次の各問いに答えよ.
(1) 前回の授業において.以下のことを説明しました.

『2 次元円は 1 次元円の寄せ集め』
『3 次元円は 2 次元円の寄せ集め』
『4 次元円は 3 次元円の寄せ集め』

このことを踏まえて, n 次元円は何次元円の寄せ集めと考えることが出来るか答えよ.
またそのことより, $V_n(r) = 2r\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} V_{n-1}(r\cos\theta)\cos\theta d\theta$ となることを示せ.(ヒント：前回, $V_2(r), V_3(r), V_4(r)$ を求めるとき r の部分を何に変えて積分したかを考えてください.)

(2) $V_n(r) = V_n(1)r^n$ という関係式を用いて,

$$V_n(r) = 2rV_{n-1}(r)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$$

となることを示せ.

(3) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$ とおく.

(i) $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ を示せ.
(ii) m を 0 以上の整数とする.次を示せ.

$$I_n = \begin{cases} I_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m}\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} & (n = 2m \text{ のとき}) \\ I_{2m-1} = \dfrac{2m-2}{2m-1}\dfrac{2m-4}{2m-3}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}1 & (n = 2m-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし $\cos^0\theta = 1$ とする.

(4) 例えば, $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ のような 1 つ飛ばしで数字をかけ算していくものを 6! と表すように,
$6\cdot4\cdot2$ のような 2 つ飛ばしでかけ算していくものを 6!! と表す.(!!を二重階乗と呼ぶ)
また, 5!! のように!!の前の数字が奇数であれば, $5\cdot3\cdot1$ というように 2 つ飛ばしで 1 までかけ算していく.
問：この二重階乗を用いて, (3) の I_{2m} と I_{2m-1} を表せ.ただし, $0!! = 1$ とする.

(5) $n = 2m$ のときについて考える.

(i) $V_{2m}(r) = (\dfrac{\pi}{2})^m(2r)^{2m}\dfrac{1}{(2m)!!}$ となることを示せ.ただし, $V_0(r) = 1$ を用いてもよい.
(ii) $(2m)!!$ を $m!$ を用いて表せ.
(iii) $(i), (ii)$ を用いて, $V_{2m}(r)$ を表せ.

(6) $n = 2m-1$ のときについて考える.

(i) $V_{2m-1}(r) = \pi^{m-1}r^{2m-1}\dfrac{(2m)!!}{m!(2m-1)!!}$ となることを示せ.
(ii) $(2m-1)!!$ を階乗を用いて表せ。
(iii) (5) の (ii), (6) の $(i), (ii)$ を用いて, $V_{2m-1}(r)$ を表せ.

略解

(1)$n-1$ 次元の寄せ集め

(2) 略

(3) 略

(4)$I_{2m}=\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{\pi}{2}, I_{2m-1}=\dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}$

(5)(i) 略　　　$(ii)(2m)!!=2^m m!$　　　(iii) 略

(6)(i) 略　　　$(ii)(2m-1)!!=\dfrac{(2m-1)!}{2^{m-1}(m-1)!}$　　(iii) 略