

第10回 倍角・半角の公式 (計算式確認資料)

① 2倍角の公式

(cosについて)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

において、 $\beta = \alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \alpha) &= \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

さらに変形すると、

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \quad \left(\begin{array}{l} \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{array} \right) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(tanについて)

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

において、 $\beta = \alpha$ とおくと、

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \tan\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \quad \text{が得られる。}$$

② 3倍角の公式

$3\alpha = 2\alpha + \alpha$ として、加法定理と2倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + \alpha) &= \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha \cos\alpha \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha \\ &= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha \\ &= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - \sin^3\alpha - \sin^3\alpha \\ \sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha + \alpha) &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cos\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha \sin\alpha \\ &= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha \cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha) \cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\ \cos 3\alpha &= -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha // \end{aligned}$$

カッコの前のマイナスに注意!!

③ 半角の公式

2倍角の公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ を変形すると、

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

α の代わりに $\frac{\alpha}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos\alpha}{2} // \\ \text{また、} \tan^2\alpha &= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \text{ より、} \\ \tan^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} // \end{aligned}$$