公式 (i) の証明

前回の授業で学んだ定積分の定義を思い出すと，示したい公式 (i) の左辺は，

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)+g(x_k)\}\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)\Delta x+g(x_k)\Delta x\} \qquad (1)\end{aligned}$$

と変形できる．ここで，今回の授業の終わりで証明した Σ 記号の公式 (i):

$$\sum_{k=1}^{n}\{a_k+b_k\}=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k \qquad (2)$$

を用いると，式 (1) は

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x+\sum_{k=1}^{n}g(x_k)\Delta x\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g(x_k)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad (3)\end{aligned}$$

となる．最後の行では，定積分の定義を再び使った．これにて公式 (i) が示せた（証明終）．

公式 (ii) の証明

上と同様に，定積分の定義から，

$$\int_a^b \{\alpha f(x)\}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\alpha f(x_k)\Delta x\}. \qquad (4)$$

ここで Σ 記号の公式 (ii):

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha\cdot a_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad (5)$$

を使えば，式 (4) は

$$\begin{aligned}\int_a^b \{\alpha f(x)\}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\alpha\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x \\ &= \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad (6)\end{aligned}$$

となる．これにて公式 (ii) が示せた（証明終）．