

**1**

(30 点)

$0 \leq \theta < 90^\circ$  とする.  $x$  についての 4 次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ.

**2**

(30 点)

$t$  を実数とする.  $y = x^3 - x$  のグラフ  $C$  へ点  $P(1, t)$  から接線を引く.

- (1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような  $t$  の範囲を求めよ.
- (2)  $t$  が (1) で求めた範囲を動くとき,  $P(1, t)$  から  $C$  へ引いた接線と  $C$  で囲まれた部分の面積を  $S(t)$  とする.  $S(t)$  の取りうる値の範囲を求めよ.

**3**

(30 点)

座標空間における次の 3 つの直線  $l, m, n$  を考える:

$l$  は点  $A(1, 0, -2)$  を通り, ベクトル  $\vec{u} = (2, 1, -1)$  に平行な直線である.

$m$  は点  $B(1, 2, -3)$  を通り, ベクトル  $\vec{v} = (1, -1, 1)$  に平行な直線である.

$n$  は点  $C(1, -1, 0)$  を通り, ベクトル  $\vec{w} = (1, 2, 1)$  に平行な直線である.

$P$  を  $l$  上の点として,  $P$  から  $m, n$  へ下ろした垂線の足をそれぞれ  $Q, R$  とする. このとき,  $PQ^2 + PR^2$  を最小にするような  $P$  と, そのときの  $PQ^2 + PR^2$  を求めよ.

**4**

(30 点)

次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列  $\{a_n\}$  を考える.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数  $n$  を求めよ. ただし,  $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$  であることは用いてよい.

**5**

(30 点)

1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり, それぞれの目が出る確率は等しいものとする. A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ, 大きな目を出した方はその目を得点とし, 小さな目を出した方は得点を 0 とする. また同じ目が出た場合は, A, B ともに得点を 0 とする. このとき, A の得点の期待値を求めよ.

**問題は、このページで終わりである.**