

(2)の解答が足りないと感じたので追加であげました

(2)解答

a の範囲は全ての n について実数解を持つときの範囲なので、a の範囲は $\frac{\sqrt{n}}{-3-2\sqrt{n}}$ の最大値と

$\frac{\sqrt{n}}{-1+2\sqrt{n}}$ の最小値の間である。

ここで $\frac{\sqrt{n}}{-3-2\sqrt{n}}$ について考える

$y = \frac{x}{-3-2x} (x \geq 1)$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(-3-2x)^2} < 0$$

よって $y = \frac{x}{-3-2x}$ は $x \geq 1$ において単調減少

つまり $\frac{\sqrt{n}}{-3-2\sqrt{n}}$ も ($n \geq 1$ なので) 単調減少

$\therefore n=1$ で $\frac{\sqrt{n}}{-3-2\sqrt{n}}$ は最大値 $\frac{1}{-5}$ をとる

同様に $\frac{\sqrt{n}}{-1+2\sqrt{n}}$ について考える

いま $y = \frac{x}{-1+2x} (x \geq 1)$ について

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(-1+2x)^2} < 0$$

よって $y = \frac{x}{-1+2x}$ は $x \geq 1$ において単調減少

つまり $\frac{\sqrt{n}}{-1+2\sqrt{n}}$ も ($n \geq 1$ なので) 単調減少

$\therefore n \rightarrow \infty$ で $\frac{\sqrt{n}}{-1+2\sqrt{n}}$ は最小値 $\frac{1}{2}$ をとる

以上より求める a の範囲は

$$\frac{-1}{5} < a < \frac{1}{2} \text{ である}$$