【東大・理系・第３問（2007)】

座標平面上の２点 P, Q が曲線 $y = x^2(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする．ただし,$P = Q$ のときは $R = P$ とする.

(1)a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ.

(2)D を図示せよ.

＜考え方＞

私が現役のときに東大を受験した際に出題された問題．当時は今よりも数学が苦手だったので，内分点の式だけ書いてその後の処理ができなかった．浪人の時には，常にこの問題を意識して数学を学んだことを覚えている．本問のすばらしいところは，前述した３つのやり方すべてで解けるが、いずれも容易な解法ではないという点である。

（解答）(1)$P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とおく.

但し，$-1 \leqq p \leqq 1, -1 \leqq q \leqq 1$

すると，$\mathrm{R}\left(\dfrac{2p+q}{3}, \dfrac{2p^2+q^2}{3}\right)$ であり,

$a = \dfrac{2p+q}{3} \cdots ①, b = \dfrac{2p^2+q^2}{3} \cdots ②$ とする.

① より $q = 3a - 2p$ で，② に代入して

$b = \dfrac{1}{3}\left\{2p^2 + (3a-2p)^2\right\}$

$\Leftrightarrow b = 2p^2 + 3a^2 - 4ap$

$\Leftrightarrow 2p^2 - 4ap + 3a^2 - b = 0$

$\Leftrightarrow p = \dfrac{2a \pm \sqrt{-2a^2+2b}}{2}$

$\therefore q = a \mp \sqrt{-2a^2+2b}$（複合同順）

p, q は実数だから,

$-2a^2 + 2b \geqq 0 \Leftrightarrow b \geqq a^2 \cdots (\star)$

また，$-1 \leqq p \leqq 1, -1 \leqq q \leqq 1$ となる p, q が一組以上存在する条件は

$$-1 \leqq \frac{2a + \sqrt{-2a^2+2b}}{2} \leqq 1 \cdots ③$$

かつ

$$-1 \leqq a - \sqrt{-2a^2+2b} \leqq 1 \cdots ④$$

または

$$-1 \leqq \frac{2a - \sqrt{-2a^2+2b}}{2} \leqq 1 \cdots ⑤$$

かつ

$$-1 \leqq a + \sqrt{-2a^2+2b} \leqq 1 \cdots ⑥$$

③ $\Leftrightarrow -2a - 2 \leqq \sqrt{-2a^2+2b} \leqq 2 - 2a$

今，$-1 \leqq a \leqq 1$ であるので

$-2a - 2 \leqq 0, 2 - 2a \geqq 0$ となり,

$-2a - 2 \leqq \sqrt{-2a^2+2b}$ は、$(\star)$ の下で常に成立し,

$(\star)$ の下で,

③ $\Leftrightarrow -2a^2 + 2b \leqq (2-2a)^2$

$\Leftrightarrow b \leqq 3a^2 - 4a + 2$

同様にして、$(\star)$ の下で,

④ $\Leftrightarrow b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$

⑤ $\Leftrightarrow b \leqq 3a^2 + 4a + 2$

⑥ $\Leftrightarrow b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 - a + \dfrac{1}{2}$

以上より、，$b \geqq a^2$ の下で,

$b \leqq 3a^2 - 4a + 2$ かつ $b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$ (Fig1)

または

$b \leqq 3a^2 + 4a + 2$ かつ $b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 - a + \dfrac{1}{2}$ (Fig2)

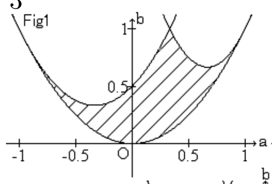
ゆえに，グラフを図示して，求める範囲は,

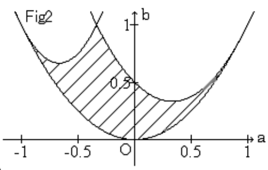
$-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき　　$a^2 \leqq b \leqq 3a^2 + 4a + 2$

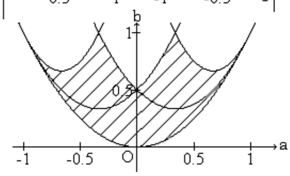
$-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ のとき　　$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 - a + \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　　$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$

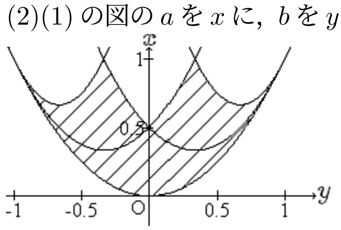
$\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき　　$a^2 \leqq b \leqq 3a^2 - 4a + 2$







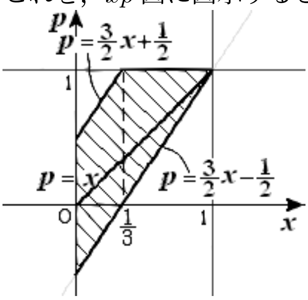
(2)(1) の図の a を x に，b を y に変えたものである.



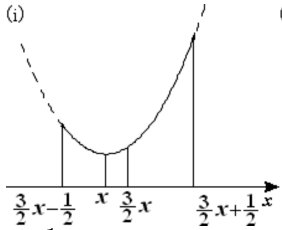
（別解）(1)$P(p,p^2),Q(q,q^2)$ とおくと，
$-1 \leqq p \leqq 1, -1 \leqq q \leqq 1,\ R\left(\dfrac{2p+q}{3},\dfrac{2p^2+q^2}{3}\right)$
である．
まず，D を表す式を求める．
$x=\dfrac{2p+q}{3}\cdots$①$,y=\dfrac{2p^2+q^2}{3}\cdots$② とする．
D は明らかに y 軸対称であるから，ひとまず $x \geqq 0$ で考える．
① より，$q=3x-2p\cdots$③
② に代入して，

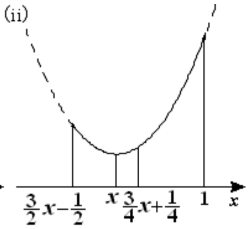
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\left\{2p^2+(3x-2p)^2\right\} \\ &= 2p^2-4px+3x^2 \\ &= 2(p-x)^2+x^2 \end{aligned}$$

x を固定し，p を変化させたときの y のとり得る値の範囲を求める．
ここで，p の範囲が非常に重要になってくる．
③ より，$-1 \leqq q \leqq 1$ だから，
$-1 \leqq 3x-2p \leqq 1$
$\therefore \dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ かつ $-1 \leqq p \leqq 1$ かつ $0 \leqq x \leqq 1$
これを，xp 図に図示すると，



よって，p の範囲は，
$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ のとき　$\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq 1$
$f(p)=2(p-x)^2+x^2$ とおく．
$y=f(p)$ の軸は $p=x$ である．
(i)$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき
区間のど真ん中は，$p=\dfrac{3}{2}x$ であり，
$0 \leqq x$ のときは $x \leqq \dfrac{3}{2}x$ だから，
$y=f(p)$ は $p=x$ で最小値を，$p=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ で最大値をとる．
$\therefore f(x) \leqq y \leqq f\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)$
$\Leftrightarrow x^2 \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$





(ii)$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ のとき
区間のど真ん中は，$p=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}$ であり，
$\left(\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}\right)-x=\dfrac{1-x}{4} \geqq 0$ だから，
$y=f(p)$ は $p=x$ で最小値を，$p=1$ で最大値をとる．
$\therefore f(x) \leqq y \leqq f(1)$
$\Leftrightarrow x^2 \leqq y \leqq 3x^2-4x+2$
y 軸対称も考慮して，
$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ のとき　$x^2 \leqq y \leqq 3x^2-4x+2$
$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$x^2 \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 0$ のとき　$x^2 \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}$
$-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき　$x^2 \leqq y \leqq 3x^2+4x+2$
よって，点 (a,b) が D に属するための条件は，
$\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ のとき　$a^2 \leqq y \leqq 3a^2-4a+2$
$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$a^2 \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 0$ のとき　$a^2 \leqq y \leqq \dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2}$
$-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき　$a^2 \leqq y \leqq 3a^2+4a+2$
(2) 図示するだけなので（解答）と同じ．

【１】
平面上の点の変換
$f: P(x,y) \mapsto P'(X,Y)$

$$\begin{cases} X = x+y \\ Y = x^2+y^2 \end{cases}$$

を考える。
(1)$O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1)$ を頂点とする四角形の周はどのような図形にうつされるか。
(2)(1) の四角形 $OABC$ の内部はどのような図形にうつされるか。

＜考え方＞
(1) は実際にどこに移るか考えればよい．(2) は (1) と同じように境界を考えても良いし，x, y が存在するための X, Y を考えても良い．そのとき，解と係数を利用するか，実際に解いて代入するかの２つの選択肢がある．

（解答）直線 $y=x$ に関して対称な２点 $(a,b), (b,a)$ は同じ点 $(a+b, a^2+b^2)$ に移されるから，$y \leqq x$ の部分を考えればよい．
(1)(i)P が OA 上を動くとき
$0 \leqq x \leqq 1, y=0$ だから，

$$\begin{cases} X = x \\ Y = x^2 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \text{ より，} \begin{cases} Y = X^2 \\ 0 \leqq X \leqq 1 \end{cases}$$

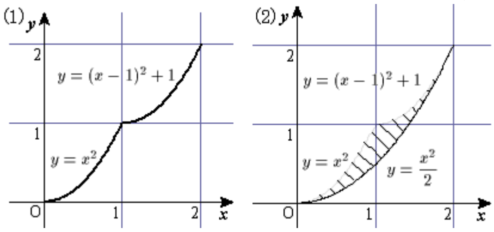
(ii)P が AB 上を動くとき
$x=1, 0 \leqq y \leqq 1$ だから，

$$\begin{cases} X = 1+y \\ Y = 1+y^2 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases} \text{ より，} \begin{cases} Y = (X-1)^2+1 \\ 1 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$$

(2)P が OB 上を動くとき
$y=x, 0<x<1$ だから，

$$\begin{cases} X = 2x \\ Y = 2x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \text{ より，} \begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}X^2 \\ 0 < X < 2 \end{cases}$$

(1) で求めたものと (2) で求めたものとで囲まれた図形が四角形 $OABC$ の内部の点が移された図形である．
図示すると，下図 (2) の斜線部．境界は薄線と $(2,2), (0,0)$ を除き，太線を含む．(四角形の淵も内部と捉える立場の人は境界はすべて含む)



（別解）$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ より，

$$\begin{cases} x+y = X \\ xy = \dfrac{1}{2}(X^2-Y) \end{cases}$$

また，x, y は t の２次方程式

$$t^2 - Xt + \frac{1}{2}(X^2-Y) = 0$$

の２解である．

$$f(t) = t^2 - Xt + \frac{X^2-Y}{2} = \left(t-\frac{X}{2}\right)^2 + \frac{X^2-2Y}{4}$$

とおく．
$f(t)=0$ が $0<t<1$ に２解を持つための x', y' の満たすべき条件を求めればよい．

$$\therefore \begin{cases} X^2-2Y \leqq 0 \\ 0 < \dfrac{X}{2} < 1 \\ f(0) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \geqq \dfrac{1}{2}X^2 \\ 0 < X < 2 \\ Y < X^2 \\ Y < (X-1)^2+1 \end{cases}$$

（別解２）〜解いて代入〜

$$\begin{cases} x+y = X \\ x^2+y^2 = Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{X \pm \sqrt{2Y-X^2}}{2} \\ y = \dfrac{X \mp \sqrt{2Y-X^2}}{2} \end{cases} \quad \text{（複合同順）}$$

$\dfrac{X-\sqrt{2Y-X^2}}{2} \leqq \dfrac{X+\sqrt{2Y-X^2}}{2}$ だから，
$0<x<1, 0<y<1$ となるための X, Y の条件は，

$$\underbrace{0 < \frac{X-\sqrt{2Y-X^2}}{2}}_{Ⓐ} \leqq \underbrace{\frac{X+\sqrt{2Y-X^2}}{2} < 1}_{Ⓑ}$$

x, y は実数だから，$2Y-X^2 \geqq 0$
Ⓐ より，$\sqrt{2Y-X^2} < X$
$X=x+y>0$ だから，
２乗して整理して，$Y < X^2$
Ⓑ より，$\sqrt{2Y-X^2} < 2-X$
$X=x+y<2$ だから，
２乗して整理して，$Y < X^2-2X+2$
以上より，

$$\begin{cases} Y \geqq \frac{1}{2}X^2 \\ Y < X^2 \\ Y < X^2-2X+2 \end{cases}$$

【2】

2点 $P(x,y), Q(X,Y)$ の間に

$$X=x+y,\quad Y=2x+y^2$$

の関係がある。点 $P(x,y)$ が

(1)x 軸より下側　　(2)y 軸より右側

のそれぞれを動くとき，点 Q の動く範囲を図示せよ.

＜考え方＞

(1)x 軸より下側ということは，y に条件 $y<0$ がついているということである．よって，x を消去して，$y(<0)$ が存在するための X,Y の条件を求めればよい.

(2)y 軸より右側ということは x に条件 $x>0$ がついているということである.

（解答）(1)

$\begin{cases} X=x+y \\ Y=2x+y^2 \end{cases}$ より，x を消去して,

$y^2-2y+2X-Y=0$

$f(y)=y^2-2y+2X-Y=(y-1)^2+2X-Y-1$

とおくと，X,Y の満たすべき条件は,

$f(y)=0$ が $y<0$ の解を少なくとも一つもつための条件である.

従って，$f(y)$ のグラフの軸は，$y=1$ であるから，$f(0)<0$ であればよい.

よって X,Y の条件は，$Y>2X$

図示すると下図 (1) の斜線部．境界除く.

(2)

$\begin{cases} X=x+y \\ Y=2x+y^2 \end{cases}$ より，y を消去して,

$x^2+2(1-X)x+X^2-Y=0$

$g(x)=x^2.2(X-1)x+X^2-Y$

$=\{x-(X-1)\}^2+2X-Y-1$

とおくと，X,Y の満たすべき条件は，$g(x)=0$ が $x>0$ の解を少なくとも一つもつための条件である.

（ア）$X-1\leqq 0$ のとき

$f(0)<0$ であればよい.

$\therefore Y>X^2$

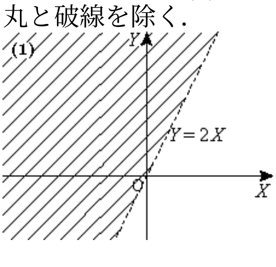
（イ）$X-1>0$ のとき

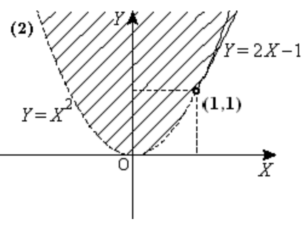
$2X-Y-1\leqq 0$ であればよい.

$\therefore Y\geqq 2X-1$

（ア），（イ）より，$\begin{cases} Y>X^2(X\leqq 1) \\ Y\geqq 2X-1(X>1) \end{cases}$

図示すると下図 (2) の斜線部．境界は実線を含み白丸と破線を除く.





（別解）〜解いて代入〜

(1)$y^2-2y+2X-Y=0$ より,

$y=1\pm\sqrt{Y-2X+1}$

y は実数だから，$Y-2X+1\geqq 0$　$\therefore Y\geqq 2X-1$

また，$1+\sqrt{Y-2X+1}>0$ だから負にはなりえない.

$y<0$ となる y が存在するためには,

$1-\sqrt{Y-2X+1}<0$　$\therefore 1<\sqrt{Y-2X+1}$

両辺正だから，$1<Y-2X+1$　$\therefore Y>2X$

$Y\geqq 2X-1$ とあわせて，$Y>2X$

(2)$x^2+2(1-X)x+X^2-Y=0$ より,

$x=-1+X\pm\sqrt{Y-2X+1}$

x は実数だから,

$Y-2X+1\geqq 0$　$\therefore Y\geqq 2X-1\cdots(*)$

$x>0$ となる x が存在するためには,

$-1+X+\sqrt{Y-2X+1}>0$

$\Leftrightarrow X-1>\sqrt{Y-2X+1}\cdots$①

または

$-1+X-\sqrt{Y-2X+1}>0$

$\Leftrightarrow X-1>-\sqrt{Y-2X+1}\cdots$②

(i)$X-1\geqq 0$ のとき

② は必ず成立するから,

$(*)$ でありさえすればよい.

(ii)$X-1<0$ のとき

① は左辺 <0 となり成立しない.

② より，$1-X<\sqrt{Y-2X+1}$　$\therefore Y>X^2$

(i)(ii) より，$\begin{cases} Y>X^2(X\leqq 1) \\ Y\geqq 2X-1(X>1) \end{cases}$

【3】

実数 x, y が $\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$ を満たして変化するとき，

$$\begin{cases} X = 2xy \\ Y = x^2 - y^2 \end{cases}$$

で定まる点 (X, Y) の存在領域と，その面積 S を求めよ．

＜考え方＞

x, y の両方に条件がある場合，単に片方を消去しただけではダメ．やはり，いつものように，x, y を解に持つ２次方程式を作って，存在条件を考えていく．しかし，今回は $x+y=\boxed{X, Y \text{ の式}}$，$xy=\boxed{X, Y \text{ の式}}$ とできないので，工夫が必要．

また，領域の境界を考えて解くこともできる．この場合も対称性に気を配る．与えられた式のままでは対称性が崩れているので Y に絶対値をつけ，対称性を強引に見出す．

（解答）

$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases} \cdots ①,\ \begin{cases} X = 2xy \\ Y = x^2 - y^2 \end{cases} \cdots ②$

$x^2 = s, -y^2 = t$ とおく．

① より，$\begin{cases} 0 \leqq s \leqq 1 \\ -1 \leqq t \leqq 0 \end{cases}$，② より，$\begin{cases} X = 2\sqrt{s}\sqrt{-t} \\ Y = s + t \\ 0 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$

よって，$\begin{cases} s + t = Y \\ st = -\dfrac{1}{4}X^2 \end{cases}$

s, t は z の２次方程式

$$z^2 - Yz - \frac{1}{4}X^2 = 0$$

の２解である．

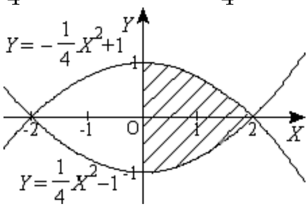
X, Y の満たすべき条件は $f(z) = 0$ が $-1 \leqq z \leqq 0, 0 \leqq z \leqq 1$ にそれぞれ１解ずつもつための条件である．

$$\therefore \begin{cases} f(-1) \geqq 0 \\ f(0) \leqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y \geqq \dfrac{1}{4}X^2 - 1 \\ Y \leqq -\dfrac{1}{4}X^2 + 1 \end{cases}$$

$\left(\because f(0) = -\dfrac{1}{4}X^2 \leqq 0 \text{ は常に成立.} \right)$

従って，(X, Y) の領域は，

$\dfrac{1}{4}X^2 - 1 \leqq Y \leqq -\dfrac{1}{4}X^2 + 1, 0 \leqq X \leqq 2$



また，

$$S = 2\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}X^2 + 1 \right) dX$$

$$= 2\left[-\frac{1}{15}X^3 + X \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

（別解）

$\begin{cases} X = 2xy \\ Y = x^2 - y^2 \end{cases}$ より，$\begin{cases} X = 2xy \\ |Y| = |x^2 - y^2| \end{cases}$

ひとまず，(x, y) から $(X, |Y|)$ に移る変換を考える．

$y = x$ に関して対称な２点 $(a, b), (b, a)$ は同じ点 $(2ab, \left|a^2 - b^2\right|)$ に移されるから，$y \leqq x$ の部分を考えればよい．

$0(0, 0), A(1, 0), B(1, 1)$ とする．

(i)(x, y) が OA 上にあるとき

$0 \leqq x \leqq 1, y = 0$ だから，

$\begin{cases} X = 0 \\ |Y| = x^2 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ より，$\begin{cases} X = 0 \\ 0 \leqq Y \leqq 1 \end{cases}$

(ii)(x, y) が AB 上にあるとき

$x = 1, 0 \leqq y \leqq 1$ だから，

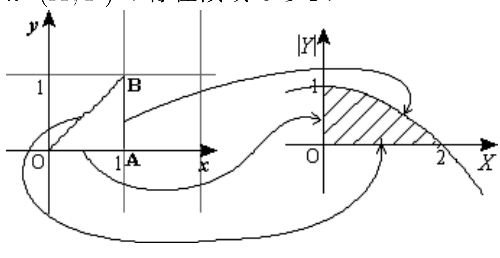
$\begin{cases} X = 2y \\ |Y| = \left|1 - y^2\right| \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{cases}$ より，$\begin{cases} |Y| = \\ 0 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$

(iii)(x, y) が BO 上にあるとき

$y = x, 0 \leqq x \leqq 1$ だから，

$\begin{cases} X = 2x^2 \\ Y = 0 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ より，$\begin{cases} Y = 0 \\ 0 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$

最後に，絶対値を解除して図示し，囲まれた部分が (X, Y) の存在領域である．



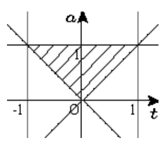
【4】

実数 a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，曲線 $C : y = x^3 - 3a^2x + a^2$ の極大点と極小点の間にある曲線 C の部分（ただし，極大点，極小点は含まない）が通る範囲を図示せよ．

(一橋大 97)

$x = -a$ のときに極大値を，$x = a$ のときに極小値をとるので $x = t(-a < t < a)$ で固定したときの y のとりうる値の範囲を考えます．このとき，a, t の範囲に十分注意が必要です．

（解答）$y = x^3 - 3a^2x + a^2$
$y' = 3x^2 - 3a^2 = 3(x + a)(x - a)$
よって曲線 C は $x = -a$ で極大値を，$x = a$ で極小値をとる．
$x = t(-a < t < a)$ で固定したときの y のとりうる値の範囲を考える．
$x = t$ のとき，
$y = t^3 - 3a^2t + a^2$
$= (1-3t)a^2 + t^3$ **（$\leftarrow a$ を変数とみる）**
$f(a) = (1 - 3t)a^2 + t^3$ とおく．
ここで a の範囲に注意する．
$-a < t < a, 0 < a < 1$ より，
$a > t, a > -t, 0 < a < 1$ であるから，グラフも参照して a の範囲は，

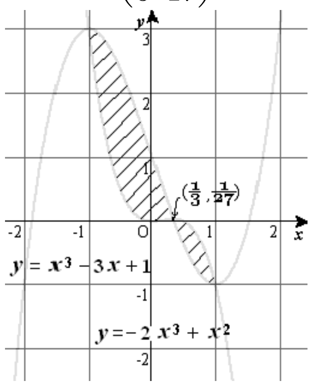


$$-t < a < 1 \quad (-1 < t \leqq 0)$$
$$t < a < 1 \quad (0 < t < 1)$$

である．また，$t = \dfrac{1}{3}$ のとき，$f(a)$ は定数になることにも注意する．
（ア）$-1 < t \leqq 0$ のとき
$1 - 3t < 0$ なので，$f(a)$ は下に凸つ．
$0 \leqq -t < a < 1$ であるから，
$f(-t) < f(a) < f(1)$
$\Leftrightarrow -2t^3 + t^2 < f(a) < t^3 - 3t + 1$
（イ）$0 < t < \dfrac{1}{3}$ のとき
$1 - 3t > 0$ なので，$f(a)$ は下に凸つ．
$0 < t < a < 1$ であるから，
$f(t) < f(a) < f(1)$
$\Leftrightarrow -2t^3 + t^2 < f(a) < t^3 - 3t + 1$
（ウ）$t = \dfrac{1}{3}$ のとき

$$f(a) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

（エ）$\dfrac{1}{3} < t < 1$ のとき
$1 - 3t < 0$ なので，$f(a)$ は上に凸つ．
$\dfrac{1}{3} < t < a < 1$ であるから，
$f(1) < f(a) < f(t)$
$\Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 < f(a) < -2t^3 + t^2$
（ア）〜（エ）より，
$-1 < x < \dfrac{1}{3}$ のとき
$-2x^3 + x^2 < f(a) < x^3 - 3x + 1$
$x = \dfrac{1}{3}$ のとき
$f(a) = \dfrac{1}{27}$
$\dfrac{1}{3} < x < 1$ のとき
$x^3 - 3x + 1 < f(a) < -2x^3 + x^2$
$y = -2x^3 + x^2$ のとき，$y' = 2x(1 - 3x)$ だから，
$x = 0$ で極小値 0 を，$x = \dfrac{1}{3}$ で極大値 $\dfrac{1}{27}$ をとる．
$y = x^3 - 3x + 1$ のとき，$y' = 3(x + 1)(x - 1)$ だから，
$x = 1$ で極小値 -1 を，$x = -1$ で極大値 3 をとる．
求める範囲は次図の斜線部．
（境界は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{27}\right)$ 以外は除く）



最後のところで t が x になっていますが，x が定数だということを $x = t$ とおいて見やすくしただけなので，問題はありません．なので，はじめから x のままでやっても構いません．ここは好みの問題です．さて，今は x を固定してみましたが，この問題は実際に a について解くこともできます．

（別解）$y = x^3 - 3a^2x + a^2$
$y' = 3(x + a)(x - a)$ よって，曲線 C は $x = -a$ で極大値を，$x = a$ で極小値をとる．
極大点と極小点の間の部分の曲線は，

$$\begin{cases} y = x^3 - 3a^2x + a^2 \\ -a < x < a \cdots ① \end{cases}$$

である．また，$0 < a < 1$ だから，① とあわせて，

$|x| < a < 1$
である．よって，

$$\begin{cases} y = (1-3x)a^2 + x^3 \cdots ② \\ |x| < a < 1 \cdots ③ \end{cases} \cdots (*)$$

なる a が存在するための，x, y の満たすべき条件を考えればよい．

（ア）$x = \dfrac{1}{3}$ のとき

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{27} \\ \dfrac{1}{3} < a < 1 \end{cases}$$ となり，

$(x, y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{27}\right)$ は適する．

（イ）$x \neq \dfrac{1}{3}$ のとき

$a^2 = \dfrac{y - x^3}{1 - 3x}$ となるから，

$$\begin{cases} \dfrac{y - x^3}{1 - 3x} > 0 \\ a = \sqrt{\dfrac{y - x^3}{1 - 3x}} \end{cases} \cdots (*)(*)$$

$a = \sqrt{\dfrac{y - x^3}{1 - 3x}}$ を ③ に代入して

$|x| < \sqrt{\dfrac{y - x^3}{1 - 3x}} < 1$

$\Leftrightarrow x^2 < \dfrac{y - x^3}{1 - 3x} < 1 \cdots ④$

この式は，$\dfrac{y - x^3}{1 - 3x} > 0$ も満たすので，$(*)(*)$ と同値である．

（i）$1 - 3x > 0$ のとき
④ $\Leftrightarrow x^2(1 - 3x) < y - x^3 < 1 - 3x$
$\Leftrightarrow -2x^3 + x^2 < y < x^3 - 3x + 1$

（ii）$1 - 3x < 0$ のとき
④ $\Leftrightarrow x^2(1 - 3x) > y - x^3 > 1 - 3x$
$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 < y < -2x^3 + x^2$

（ア）（イ）より，

$$\begin{cases} -2x^3 + x^2 < y < x^3 - 3x + 1 (-1 < x < \dfrac{1}{3}) \\ y = \dfrac{1}{27} (x = \dfrac{1}{3}) \\ x^3 - 3x + 1 < y < -2x^3 + x^2 (\dfrac{1}{3} < x < 1) \end{cases}$$

（あとは図示するだけ）

a の範囲を $|x| < a < 1$ のように絶対値を用いて一つの式で表したのは巧みですが，無理な人は多少面倒になりますが，場合分けをしてやっても良いです．

【5】

(1) 1つの頂点に集まる3辺の長さの和が $\frac{9}{2}$ で，対角線の長さが $\frac{\sqrt{33}}{2}$ である直方体がある．この直方体の体積を V とするとき，V の最大値，および最小値を求めよ．また，V が最大，および最小となるときの3辺の長さをそれぞれ求めよ．

(2)$a>0$ とする．辺の長さの総和が $4a$, 表面積 $\frac{a^2}{2}$ の直方体の体積を V とするとき，V のとり得る値の範囲を求めよ．

<考え方>

(2) をやった後なら，(1) も容易いでしょう．シンプルな設定ながらも，意外とやりにくい問題だと言えます．$V=$ と解いて範囲を見失ってしまわないように注意が必要です．

（解答）(1) たて，よこ，高さをそれぞれ x,y,z とすると，$x>0, y>0, z>0$ であって，

辺の条件より，$x+y+z=\frac{9}{2}$

対角線の条件より，$x^2+y^2+z^2=\frac{33}{4}$

また，体積は $V=xyz$ で与えられる．

$$\therefore \begin{cases} x+y+z=\frac{9}{2} \\ x^2+y^2+z^2=\frac{33}{4} \\ xyz=V \end{cases}$$

V のとり得る値は，(∗) なる3つの正の数 x,y,z が存在するための V の条件Ⓐ として得られる．

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より，

$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{33}{4}\right)=6$

従って，x,y,z は

$$t^3-\frac{9}{2}t^2+6t-V=0$$

の解である．

$f(t)=t^3-\frac{9}{2}t^2+6t$ とおく．

$f'(t)=3t^2-9t+6=3(t-1)(t-2)$

$f'(t)=0$ とすると，$t=1,2$

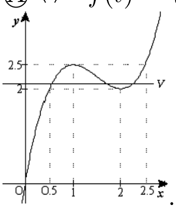
$f(1)=\frac{5}{2}, f(2)=2$ である．

また，$f(t)=\frac{5}{2}$ とすると，$(t-1)^2\left(t-\frac{5}{2}\right)=0$

$f(t)=2$ とすると，$\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-2)^2=0$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗

Ⓐ ⇔「$f(t)=V$ が正の3実解を持つ（重解も可）」



∴図より，

V の最大値は $\frac{5}{2}$ でこのとき，3辺は $1,1,\frac{5}{2}$

V の最小値は 2 でこのとき，3辺は $2,2,\frac{1}{2}$

(2) たて，よこ，高さをそれぞれ x,y,z とすると，$x>0, y>0, z>0$ であって，題意より，

すべての辺の和について　$4(x+y+z)=4a$

表面積について　$2(xy+yz+zx)=\frac{a^2}{2}$

また，体積は $V=xyz$ で与えられる．

$$\therefore \begin{cases} x+y+z=a \\ xy+yz+zx=\frac{a^2}{4} \quad \cdots(*) \\ xyz=V \end{cases}$$

V のとり得る値は (∗) なる3つの正の数 x,y,z が存在するための V の条件Ⓐ として得られる．(∗) より，x,y,z は t の3次方程式

$$t^3-at^2+\frac{a^2}{4}t-V=0$$

の解である．

$f(t)=t^3-at^2+\frac{a^2}{4}t$ とおく．

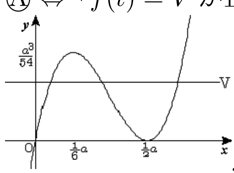
$f'(t)=3t^2-2at+\frac{a^2}{4}=(3t-\frac{1}{2}a)(t-\frac{1}{2}a)$

$f'(t)=0$ とすると，$t=\frac{1}{6}a, \frac{1}{2}a$

また，$f\left(\frac{1}{6}a\right)=\frac{a^3}{54}, f\left(\frac{1}{2}a\right)=0$ である．

t	$\cdots$	$\frac{1}{6}a$	$\cdots$	$\frac{1}{2}a$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	$\frac{a^3}{54}$	↘	0	↗

Ⓐ ⇔「$f(t)=V$ が正の3実解を持つ（重解も可）」



∴図より，$0<V \leqq \frac{a^3}{54}$

【6】

座標平面上の点 (x, y) が $-1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 2$ の範囲を動くとき，点 $(x+y, xy)$ の動く範囲を図示せよ．またこのとき，$\dfrac{xy+m}{x+y+2}$(ただし，m は定数）の最大値を求めよ．

(07 上智大（理工）)

<考え方>

これもいつものごとく，$x+y=X, xy=Y$ とおくのは朝飯前．そのあと，x, y を解に持つ２次方程式 $t^2-Xt+Y=0$ とおき，２解が $-1 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 2$ に存在するための X, Y の条件を考えればよい．

（解答）$x+y=X, xy=Y$ とおく．x, y は t の２次方程式

$$t^2-Xt+Y=0$$

の２解である．

$$f(t)=t^2-Xt+Y=\left(t-\frac{X}{2}\right)^2-\frac{X^2}{4}+Y$$

とおく．

$f(t)=0$ が $-1 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 2$ に２解をもつための X, Y の条件を求めればよい．

(i)$-1 \leqq t \leqq 0, 0 \leqq t \leqq 1$ に解を持つ場合

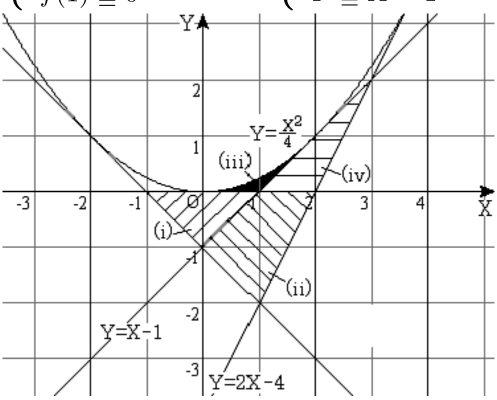
$$\begin{cases} -1 \leqq \frac{X}{2} \leqq 1 \\ -\frac{1}{4}X^2+Y \leqq 0 \\ f(-1) \geqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \\ f(0) \leqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqq X \leqq 2 \\ Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \\ Y \geqq -X-1 \\ Y \geqq X-1 \\ Y \leqq 0 \end{cases}$$

(ii)$-1 \leqq t \leqq 0, 1 \leqq t \leqq 2$ に解を持つ場合

$$\begin{cases} -1 \leqq \frac{X}{2} \leqq 2 \\ -\frac{1}{4}X^2+Y \leqq 0 \\ f(-1) \geqq 0 \\ f(2) \geqq 0 \\ f(0) \leqq 0 \\ f(1) \leqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqq X \leqq 4 \\ Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \\ Y \geqq -X-1 \\ Y \geqq 2X-4 \\ Y \leqq 0 \\ Y \leqq X-1 \end{cases}$$

(iii)$0 \leqq t \leqq 1$ に２解を持つ場合

$$\begin{cases} 0 \leqq \frac{X}{2} \leqq 1 \\ -\frac{1}{4}X^2+Y \leqq 0 \\ f(0) \geqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqq X \leqq 2 \\ Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \\ Y \geqq 0 \\ Y \geqq X-1 \end{cases}$$



(iv)$0 \leqq t \leqq 1, 1 \leqq t \leqq 2$ に２解を持つ場合

$$\begin{cases} 0 \leqq \frac{X}{2} \leqq 2 \\ -\frac{1}{4}X^2+Y \leqq 0 \\ f(0) \geqq 0 \\ f(2) \geqq 0 \\ f(1) \leqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqq X \leqq 4 \\ Y \leqq \frac{1}{4}X^2 \\ Y \geqq 0 \\ Y \geqq 2X-4 \\ Y \leqq X-1 \end{cases}$$

図示する範囲は左下図の斜線部や黒塗りの部分（境界含む）．

さて，$\dfrac{xy+m}{x+y+2}=\dfrac{Y+m}{X+2}=\dfrac{Y-(-m)}{X-(-2)}$ であるから，$\dfrac{xy+m}{x+y+2}$ は，２点 $(-2, -m)(X, Y)$ を通る傾きとみなせる．

図から，$\dfrac{xy+m}{x+y+2}$ は，$(X, Y)=(3, 2)$ 又は $(-1, 0)$ のとき最大となり得る．

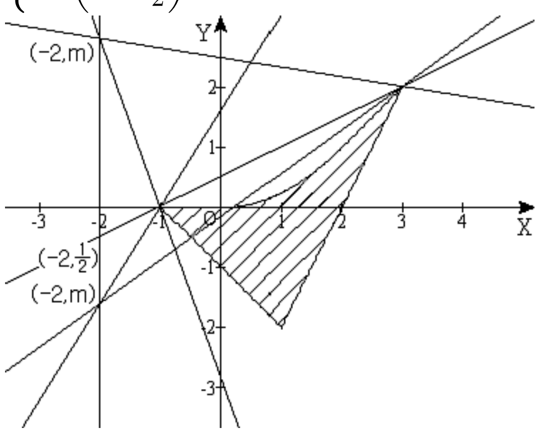
$(X, Y)=(3, 2)$ のとき　与式 $=\dfrac{2+m}{5}$

$(X, Y)=(-1, 0)$ のとき　与式 $=m$

$\dfrac{2+m}{5} \geqq m$ とすると，$m \leqq \dfrac{1}{2}$

よって，最大値は

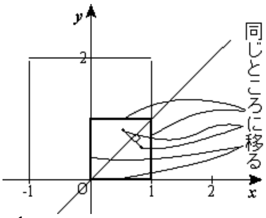
$$\begin{cases} \dfrac{2+m}{5}\left(m \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ m\left(m \geqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$



$\boxed{\text{補足}}$ ほとんど解の配置問題である．解の配置は4パターンあるので，強引にすべて場合分けしてみた．上手くやればもっと場合分けが減らせるかもしれないが，実践的にはこれで十分だと思う．後半は X と Y の条件がスパっと式で表せれないので，＜練２＞でも紹介した傾きとみて考えるのがよいであろう．

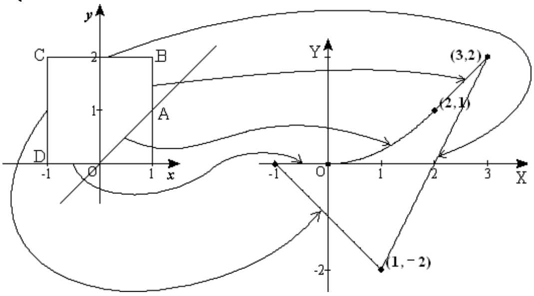
さて，この問題で紹介したかった手法は（解答）ではなく,「領域の境界を考え，直接動きを捉える」やり方である．これを（別解）で紹介することにする．こちらも有効な手法であるのでできるようにしておきたい．

（別解）$x+y=X, xy=Y$ とおく．
直線 $y=x$ に関して対称な２点 $(a,b),(b,a)$ は同じ点 $(a+b,ab)$ に移るから $y \geqq x$ の部分を考えればよい．



$$\begin{cases} -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \\ y \geqq x \end{cases}$$
であらわされる領域の境界上の点を P とし，xy 平面上で，$O(0,0)$，$A(1,1)$，$B(1,2)$，$C(-1,2)$，$D(-1,0)$ とする．

(i)P が OA 上にあるとき
$y=x, 0 \leqq x \leqq 1$ だから，
$$\begin{cases} X=2x \\ Y=x^2 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \text{より，} \begin{cases} Y=\frac{1}{4}X^2 \\ 0 \leqq X \leqq 2 \end{cases}$$
(ii)P が AB 上にあるとき
$x=1, 1 \leqq y \leqq 2$ だから，
$$\begin{cases} X=1+y \\ Y=y \\ 1 \leqq y \leqq 2 \end{cases} \text{より，} \begin{cases} Y=X-1 \\ 2 \leqq X \leqq 3 \end{cases}$$
(iii)P が BC 上にあるとき
$-1 \leqq x \leqq 1, y=2$ だから，
$$\begin{cases} X=x+2 \\ Y=2x \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \text{より，} \begin{cases} Y=2x-4 \\ 1 \leqq X \leqq 3 \end{cases}$$
(iv)P が CD 上にあるとき
$x=-1, 0 \leqq y \leqq 2$ だから，
$$\begin{cases} X=-1+y \\ Y=-y \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases} \text{より，} \begin{cases} Y=-X-1 \\ -1 \leqq X \leqq 1 \end{cases}$$
(v)P が DO 上にあるとき
$-1 \leqq x \leqq 0, y=0$ だから，
$$\begin{cases} X=x \\ Y=0 \\ -1 \leqq x \leqq 0 \end{cases} \text{より，} \begin{cases} Y=0 \\ -1 \leqq X \leqq 0 \end{cases}$$



あとは，囲まれた部分が領域だということを述べるだけである．境界がそこに移ることは分かったけど，それで囲まれた部分が求める領域かどうか分からないというかもしれないが，閉ざされた領域は閉ざされた領域に移ることは明らかとして良いだろう．だめ？かなぁ．う〜ん..

【7】
$\cos x+\cos y=1$ を満たして x,y が変化するとき $\sin x+\sin y$ の変域を求めよ.

＜考え方＞
変域を求める変数がないので，$k=\sin x+\cos x$ とおく.
これは $x+y=X, xy=Y$ と置いたのと同じ感覚.
問題文の条件から，次の２式が成り立つ.

$(*)\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$ すると,（k の変域）$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{l}(*)\text{ なる } x,y \text{ が存在}\\ \text{するための } k \text{ の条件}\end{array}\right)$

また,

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=1-\sin x\cdots①\\ \sin y=k-\sin x\cdots②\\ (1-\cos x)^2+(k-\sin x)^2=1\cdots③\end{cases}$

であり,
「$(*)$ なる x,y あり」$\Rightarrow$「①, ②, ③ なる x,y あり」$\Rightarrow$「③ なる x あり」
逆に,
「③ なる x あり」$\Rightarrow$「①, ②, ③ なる x,y あり」$\Rightarrow$「$(*)$ なる x,y あり」
であるから，結局，$(*)\Leftrightarrow$ ③
ここで何をしたかというと，③ を満たす x の値が定まれば，y の値も定まることを利用して，変数を一つ消去したのである.
このように,

x に対して y が自動的に定まるように式変形できれば,
x,y の存在条件は,「x のみの存在条件」として求められる

のである.

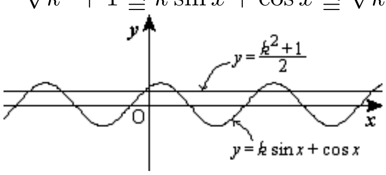
（解答）$\sin x+\sin y=k$ とおく．すると,

$(*)\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \sin x+\sin y=k\end{cases}$

なる実数 x,y が存在するための k の範囲を求めればよい.

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\cos y=1-\sin x\cdots①\\ \sin y=k-\sin x\cdots②\\ (1-\cos x)^2+(k-\sin x)^2=1\cdots③\end{cases}$

であり，x の値が定まると，y の値は，①, ② により，自動的に定まるから,
$(*)\Leftrightarrow$ ③ である.
③ より,
$(1-\cos x)^2+(k-\sin x)^2=1$
$1+\cos^2 x-2\cos x+k^2+\sin^2 x-2k\sin x=1$
$k\sin x+\cos x=\dfrac{k^2+1}{2}$
x が変化するときの $k\sin x+\cos x$ の変域は,
$-\sqrt{k^2+1}\leqq k\sin x+\cos x\leqq\sqrt{k^2+1}$



であるので,
「③ なる x が存在する」
$\Leftrightarrow -\sqrt{k^2+1}\leqq\dfrac{k^2+1}{2}\leqq\sqrt{k^2+1}$
$\Leftrightarrow \dfrac{k^2+1}{2}\leqq\sqrt{k^2+1}$（$\because 0<\frac{k^2+1}{2}$ が常に成立）
$\Leftrightarrow (k^2+1)^2\leqq 4(k^2+1)$
$\Leftrightarrow k^2+1\leqq 4$
$\Leftrightarrow k^2\leqq 3$
$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$
$\therefore$「$(*)$ なる x,y が存在する」$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$
よって $\sin x+\sin y$ の変域は,
$-\sqrt{3}\leqq\sin x+\sin y\leqq\sqrt{3}$

【8】
(1)c を $-2 < x < 2$ の範囲の定数とする．実数 x, y が $\sin x - \cos y = c$ を満たして変化するとき，$\cos x - \sin y$ のとり得る値の範囲を c を用いて表せ.
(2)x, y は $\sin x + y\cos x = y$ を満たす実数とする．y が $2 \leqq y \leqq 3$ の範囲で変化するとき，$\tan x$ のとり得る値の範囲を求めよ.

（解答）
(1)$k = \cos x - \sin y$ とおく.
すると,

$$(*)\begin{cases} \sin x - \cos y = c \\ \cos x - \sin y = k \end{cases} \text{であり,}$$

$$（k\text{ の変域}）=\begin{pmatrix} (*)\text{ なる } x, y \text{ が存在} \\ \text{するための } k \text{ の条件} \end{pmatrix}$$

$$\therefore (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sin x - c \cdots ① \\ \sin y = \cos x - k \cdots ② \\ (\cos x - k)^2 + (\sin x - c)^2 = 1 \cdots ③ \end{cases}$$

③ により，x の値が定まると，y の値も，①, ② により，自動的に定まるので，③ なる x が存在するための，k の条件を求めればよい.
③ より,

$$\cos^2 x + k^2 - 2k\cos x + \sin^2 x + c^2 - 2c\sin x = 1$$

$$c\sin x + k\cos x = \frac{c^2 + k^2}{2}$$

x が変化するときの $c\sin x + k\cos x$ の変域は,

$$-\sqrt{c^2 + k^2} \leqq c\sin x + k\cos x \leqq \sqrt{c^2 + k^2}$$

$\therefore$「① なる x が存在する」

$$\Leftrightarrow -\sqrt{c^2 + k^2} \leqq \frac{c^2 + k^2}{2} \leqq \sqrt{c^2 + k^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 + k^2 \leqq 2\sqrt{c^2 + k^2}$$

$$\Leftrightarrow (c^2 + k^2)^2 \leqq 4(c^2 + k^2) \cdots ④$$

$c^2 + k^2 \neq 0$ のとき ④ $\Leftrightarrow c^2 + k^2 \leqq 4$
であり，これは $c = k = 0$ のときも成立する.
よって,

$$④ \Leftrightarrow c^2 + k^2 \leqq 4$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{4 - c^2} \leqq k \leqq \sqrt{4 - c^2}$$

$$\therefore -\sqrt{4 - c^2} \leqq \cos x - \sin y \leqq \sqrt{4 - c^2}$$

(2)
＜考え方＞
y の範囲は分かっているが，x の範囲は不明.
$\rightarrow x$ の範囲を求める．$\rightarrow y$ を消去する.
（解答）

$$\begin{cases} \sin x + y\cos x = y \cdots ⑤ \\ 2 \leqq y \leqq 3 \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ より,

$$y(1 - \cos x) = \sin x$$

$\cos x = 1$ のとき　$\sin x = 0 \therefore \tan x = 0$
$\cos x \neq 1$ のとき　⑥ より,

$$2 \leqq y = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \leqq 3$$

$$2 \leqq \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} \leqq 3$$

$$2 \leqq \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \leqq 3$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leqq \tan\frac{x}{2} \leqq \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 - \tan^2\frac{x}{2}}$$

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと,

$$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}\ \ (= f(t) \text{ とおく})$$

$$f'(t) = \frac{2(1 - t^2) - 2t(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2} = \frac{2(t^2 + 1)}{(1 - t^2)^2} > 0$$

$\therefore f(t)$ は単調増加.

$$\text{よって，} f\left(\frac{1}{3}\right) \leqq f(t) \leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{3}{4} \leqq \tan x \leqq \frac{4}{3}$$

$\tan x$ のとり得る値の範囲は,

$$\frac{3}{4} \leqq \tan x \leqq \frac{4}{3}, \tan x = 0$$

補足
　なかには,

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

の変形が巧みに思う人もいるかも知れない．かく言う私も，はじめはこんなの思いつかないと思っていたが，三角関数の式変形になれてくるとこのような変形も違和感なくできる．三角関数は同値関係にある式がたくさんあるので，場合に応じてベストな式にする必要がある．これはやはり経験がものを言うところだと思う.
　ただ，$1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ の方は別のところで役に立つのでぜひとも覚えておこう．これは，cos の 2 倍角の公式から導ける.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

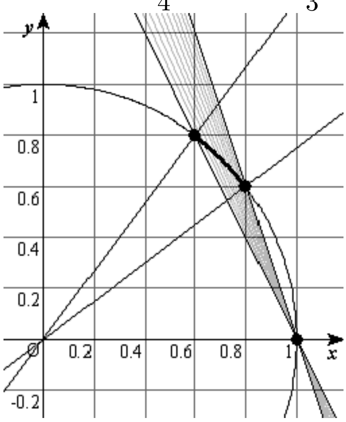
（例）
$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\left|\sin\frac{x}{2}\right|$
$\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right|$
$\sqrt{1\pm\sin x}=\left|\sin\frac{x}{2}\pm\cos\frac{x}{2}\right|$
これらを使えば，ルートをはずすことが出来て，積分できるようになる！特に理系の人はこのような形のとき，ルートがはずせるという事実は記憶に値するであろう．文系の人でも三角関数の積分をやれば，三角関数の式変形が上手になるのになぁといつも思う．ちなみに 3 つ目の式は $(\sin x+\cos x)^2$ を利用して導ける．

$$\begin{aligned}(\sin x+\cos x)^2&=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\\&=1+\sin 2x\end{aligned}$$

$\therefore |\sin x+\cos x|=\sqrt{1+\sin 2x}$

　また，$\tan x=\dfrac{\sin x-0}{\cos x-0}$ とみて，$\tan x$ を傾きで捉える方法も有効．“ 傾きと捉える ”方法はしばしばやられる方法であるので，こちらもマスターしておきたい．

（別解）〜$\tan x$ を傾きと捉える〜
$\cos x=X, \sin x=Y$ とおくと，
⑤ より，$Y=-yX+y$
この直線は，$(X,Y)=(1,0)$ を通る．
$\begin{cases}Y=-yX+y\\2\leqq y\leqq 3\\X^2+Y^2=1\end{cases}$
をみたす (X,Y) の集合は下図の太線部（$(1,0)$ も含む）．
$\tan x=\dfrac{Y}{X}$ だから，
　$\tan x=0, \dfrac{3}{4}\leqq\tan x\leqq\dfrac{4}{3}$



【9】

円 $C : x^2+y^2=1$ の外部に定点 $F(a,0)$ をとる．点 Q が C の周全体を動くとき，線分 FQ の垂直二等分線の動く範囲を求め，その概形を図示せよ．

＜考え方＞

傾きなどを用いる人もいますが，垂直二等分線は 2 点から等距離にある点の軌跡と捉えるのが定石です．あとは計算するだけです．

（解答）

点 F が円 C の外部にあることから，$a>1$ である．

また，$Q(\cos\theta,\sin\theta)$ とおけて，

線分 FQ の垂直二等分線上の点 $P(x,y)$ は $PQ=PF$ をみたすから，

$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=(x-a)^2+y^2$

$-2x\cos\theta+1-2y\sin\theta=-2ax+a^2$

$2x\cos\theta+2y\sin\theta=2ax-a^2+1$

$f(\theta)=2x\cos\theta+2y\sin\theta$ とおくと，

$-\sqrt{4x^2+4y^2}\leqq f(\theta)\leqq\sqrt{4x^2+4y^2}$

であるから，

「$f(\theta)=2ax-a^2+1$ なる θ が存在する」

$\Leftrightarrow -\sqrt{4x^2+4y^2}\leqq 2ax-a^2+1\leqq\sqrt{4x^2+4y^2}$

$\Leftrightarrow \left|2ax-(a^2-1)\right|\leqq\sqrt{4x^2+4y^2}$

$\Leftrightarrow 4(a^2-1)x^2-4a(a^2-1)+(a^2-1)^2\leqq 4x^2+4y^2$

$\Leftrightarrow 4(a^2-1)x^2-4a(a^2-1)x-4y^2+(a^2-1)^2\leqq 0$

$\Leftrightarrow 4(a^2-1)(x^2-ax)-4y^2+(a^2-1)^2\leqq 0$

$\Leftrightarrow 4(a^2-1)\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-4y^2\leqq a^2-1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{a^2-1}{4}}\leqq 1$

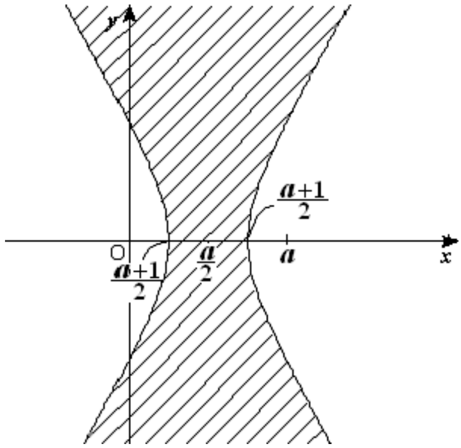
等号成立時の双曲線の焦点は，

$\left(\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{a^2-1}{4}},0\right)$

すなわち，$(0,0),(a,0)$

よって，O と F である．

求める通過範囲は，下図の斜線部であり，O,F を焦点とする双曲線の中心を含む側である．



＜参考＞

$x\cos\theta+y\sin\theta=1-y$ 　（θ は実数）の xy 平面上での通過範囲を求めよ．

・x,y は定数扱い

・残りの変数は θ

$\to\theta$ で整理して，θ について存在条件を求めればそれが通過範囲となる．

（解）$f(\theta)=x\cos\theta+y\sin\theta$ とおくと，θ が実数の範囲で変化するとき，

$f(\theta)$ の変域は，

$-\sqrt{x^2+y^2}\leqq f(\theta)\leqq\sqrt{x^2+y^2}$

であるので，

「$f(\theta)=1-y$ なる θ あり」

$\Leftrightarrow -\sqrt{x^2+y^2}\leqq 1-y\leqq\sqrt{x^2+y^2}$

（未整理だが，通過範囲になっている）

$\Leftrightarrow |1-y|\leqq\sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (1-y)^2\leqq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow y\geqq-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

【１０】
$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1$ をみたす (x,y) がすべて

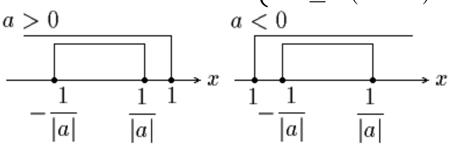
$$a(x-1)+b(y-1) \leqq 0$$

をみたすような (a,b) の範囲を求め，図示せよ．

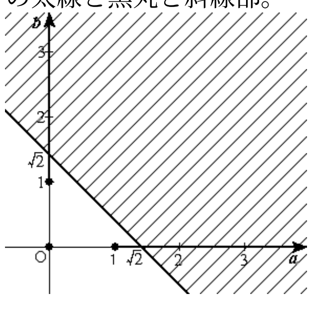
(97 東工大)

<考え方>
場合わけに気づくかどうかがポイントです。

（解答）
$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1 \cdots$ ①
$a(x-1)+b(y-1) \leqq 0 \cdots$ ②
(i)$a=b=0$ のとき
① は $0 \leqq 1$，②は $0 \leqq 0$ となり成立.
(ii)$a \neq 0, b=0$ のとき
① は $a^2x^2 \leqq 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|a|} \leqq x \leqq \dfrac{1}{|a|} \cdots$ ⅰ
② は $a(x-1) \leqq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqq 1 (a>0) \\ x \geqq 1 (a<0) \end{cases} \cdots$ ⅱ



ⅰ と ⅱ を満たす x,y(この場合は y は任意なので x についてのみ考えればよい) が存在するための a,b の満たすべき条件は $1 \leqq a$
(ii)$a=0, b \neq 0$
(i) と同様にして $1 \leqq b$
(iii)$a \neq 0, b \neq 0$ のとき
$ax=s, by=t$ とおくと，
①:$s^2+t^2 \leqq 1 \cdots$ Ⅰ　②:$s+t-a-b \leqq 0 \cdots$ Ⅱ
Ⅰ をみたすすべての点 (s,t) が Ⅱ をみたすような点 (a,b) の範囲を求めればよい．Ⅰ, Ⅱ を満たす (s,t) が存在するのは，直線 Ⅱ が原点中心で半径１の円より上側にあるか，第１象限で接するときであるから，$a+b \geqq \sqrt{2}$ であればよい．逆にこのとき，$x=\dfrac{s}{a}, y=\dfrac{t}{b}$ とすることにより，①, ② を満たすような x,y が存在することが確認できる．
よって (i)〜(iii) より，求める (a,b) の範囲は，下図の太線と黒丸と斜線部。



補足 〜$a=0, b=0$ の場合分けについて〜
この場合分けが生じることを理解についてですか，いくつか考え方があると思います．問題を多くこなすと，この手の問題は，場合分けをしたほうが無難だなと思うようになってきます．まず，一つ目の考え方です．まずは，あちらこちらに，ax や by といったかたまりが出てきているので，それを文字で置いてあげようと思うわけです．そうしてあげれば，① の条件は単なる単位円の周とその内部という条件に置き換わり，扱いやすくなります．さて、文字でおいたのちに，いよいよ x,y に代入ということになるわけですが，このときに注意すべきなのは，横着をして $ax=s, by=t$ のかたまりのまま代入してしまわないようにすることです．きちんと，$x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$ の形にしてから代入するようにします．そうすれば，$a=0, b=0$ の場合分けの必要性に気づくはずです．次に二つ目ですが，数 I からおなじみの二次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について考えてみましょう．$f(x)=0$ の解の個数を調べよといった問題を解く場合，まず第一に思いつくのは判別式 D の正負あるいはゼロにより，解の個数が変わるということですが，習いたての人によく陥りやすい間違いで，判別式による場合分けだけで終わってしまうというのがあります．そもそも，判別式を考えるのは，二次関数のときにおいてです．単に $f(x)=ax^2+bx+c$ とだけ与えられたのでは $f(x)$ が二次関数なのか，一次関数なのかわかりません．したがって，まずは $a=0$ であるのかないのかといった場合分けが必要になるわけです．このようにして，係数がゼロか否かで関数の種類がまったく違ったものになるということもあるわけで，本問においても同様の場合分けが必要になってくるということが，わかると思います．

【１１】

長さが $2r$ の線分 AB を直径とする半円がある．周上の弧 PQ で折り返したとき，折り返された弧が AB に接したとする．

このような弦 PQ の存在する範囲を求めて図示し，面積を求めよ．

(92 千葉大 改)

<考え方>

本問は端点を追っても解決できません．そこで，まず複雑な事象はもっと簡単に捉えることのできる事象に還元できないかということを考えます．このことを私は勝手にモデル化と呼んでいます．ここでは円を転がすことを考えます．また，本問では線分を捉えるというよりも直線でとらえてから範囲を抑えた方が良いです．

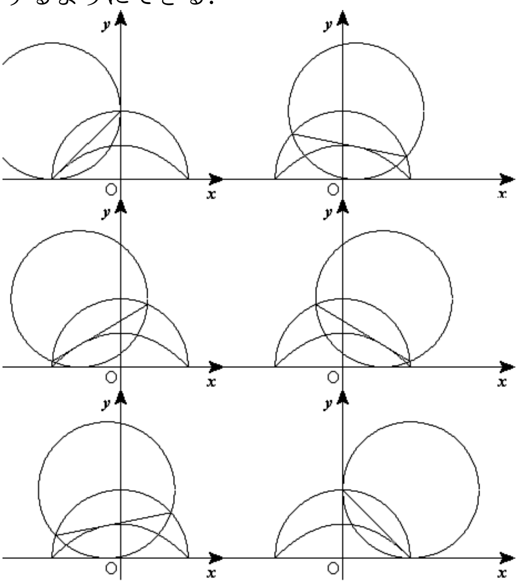
（解答）

$A(-r,0), B(r,0)$ とし，線分 AB を直径とする円を C とすると C を表す式は，

$$C : x^2+y^2=r^2$$

となる．

x 軸に接するように半径 r の円 C' を転がし，その交点を P, Q とすれば，C' 上の弧 PQ が x 軸に接するようにできる．



C' の x 座標を t と置けば，

$$C' : (x-t)^2+(y-r)^2=r^2, -r \leqq t \leqq r$$

であるので，円 C と円 C' の 2 交点を通る曲線群は，実数 k を用いて

$$(x-t)^2+(y-r)^2-r^2+k(x^2+y^2-r^2)=0$$

と表せ，直線となるとき $k=-1$ であるから，直線 PQ を表す方程式は，

$$(x-t)^2+(y-r)^2-r^2-(x^2+y^2-r^2)=0$$

つまり，

$$t^2-2xt+r^2-2ry=0$$

$f(t)=t^2-2xt+r^2-2ry$ とおくと，t の 2 次方程式 $f(t)=0$ が $-r \leqq t \leqq r$ で解を持つための x, y の条件を求めればよい．$f(t)=(t-x)^2-x^2+r^2-2ry$ であるから，

$$f(-r)f(r) \leqq 0 \cdots ①$$

または

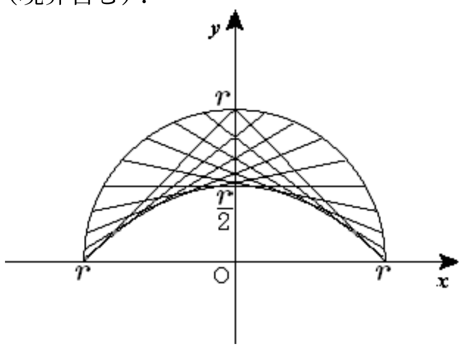
$$\begin{cases} f(-r) \geqq 0, f(r) \geqq 0 \\ -r \leqq x \leqq r \\ -x^2+r^2-2ry \leqq 0 \end{cases} \cdots ②$$

であればよい．

① より，$(r+x-y)(r-x-y) \leqq 0$

② より，$\begin{cases} y \leqq x+r \\ y \leqq -x+r \\ -r \leqq x \leqq r \\ y \geqq -\dfrac{1}{2r}x^2+\dfrac{1}{2}r \end{cases}$

さらに，線分 PQ は，$x^2+y^2 \leqq r^2$ であることも考慮して線分 PQ の存在する範囲は下図の斜線部（境界含む）．



よって面積は，

$$\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} - \int_{-r}^{r} \left(-\frac{1}{2r}x^2+\frac{1}{2}r\right)dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} -(x-r)(x+r)dx$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} - \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{6}\{r-(-r)\}^3$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} - \frac{2}{3}r^2$$

【１２】

円 $x^2+y^2=4$ の周を折り返し，折り返された弧が $A(1,0)$ を通るようにする．このような折り目すべての作る図形の面積 S を求めよ．

＜考え方＞

折り目の問題です．折り目は垂直二等分線と見るのが定石です．そして二等分線は二点からの距離が等しい点の集合であることから直線の方程式がすぐに出てきます．

（解答）

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とおく．

円を折り返したときの折り目は，線分 AQ の垂直二等分線の一部であり，その垂直二等分線上の点 $P(x,y)$ は，$AP=QP$ をみたすから，

$$(x-1)^2+y^2=(x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2$$

$$-2x+1=-4\cos\theta\cdot x+4-4\sin\theta\cdot y$$

$\therefore 4x\cos\theta+4y\sin\theta=2x+3$

$f(\theta)=4x\cos\theta+4y\sin\theta$ とおくと

$-\sqrt{16x^2+16y^2} \leqq f(\theta) \leqq \sqrt{16x^2+16y^2}$

であるから，

「$f(\theta)=2x+3$ なる θ が少なくとも１つ存在する」

$\Leftrightarrow -\sqrt{16x^2+16y^2} \leqq 2x+3 \leqq \sqrt{16x^2+16y^2}$

$\Leftrightarrow |2x+3| \leqq \sqrt{16x^2+16y^2}$

$\Leftrightarrow (2x+3)^2 \leqq 16x^2+16y^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+12x+9 \leqq 16x^2+16y^2$

$\Leftrightarrow 0 \leqq 12x^2-12x+16y^2-9$

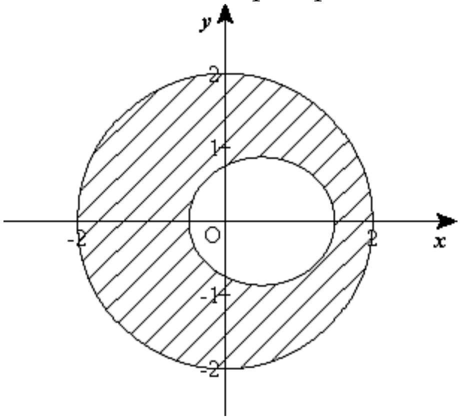
$\Leftrightarrow 0 \leqq 12\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+16y^2-12$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{y^2}{\frac{3}{4}} \geqq 1$

また，折り目は $x^2+y^2=4$ の円の周または内部にあるから，$x^2+y^2\leqq 4$ も満たす．

よって，題意を満たす折り目すべての作る図形は下図のようになり，その面積 S は

$$S=4\pi-\pi\cdot 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{13}{4}\pi$$



補足～楕円の面積について～

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

で表される楕円の面積は πab である．

この理由は簡単で，

楕円 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

は，

円 C_2：$x^2+y^2=1$

を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍したもの であるから，円 C_2 の面積 π を ab 倍して πab.

下線部の事実は他の例をとってみてもわかる．

（例）

$y=\sin 2x=\sin\dfrac{x}{\frac{1}{2}} \to y=\sin x$ を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍

$y=\dfrac{x^2}{4}=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \to y=x^2$ を x 軸方向に 2 倍

$y=\dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{y}{\frac{1}{4}}=x^2 \to y=x^2$ を y 軸方向に $\dfrac{1}{4}$ 倍

【１３】

動点 PQ は x 軸の $2 \leqq x \leqq 4$ の部分，動点 Q は y 軸の $y \geqq 0$ の部分を $PQ=4$ を満たしながら動く．このとき線分 PQ が動いてできる領域を F とする．また O は原点とし，$\angle QPO$ を α とする．このとき，領域 F を図示し，F の面積を求めよ．

(06 早稲田大 改)

＜考え方＞

実際に動かしてみれば，線分の端点ではなく線分の途中の点が境界をなすことがわかります．図示せよだけなら，適当に図示することも可能ですが，積分しなければいけないので，きちんと式まで求める必要があります．軌跡の一部がアステロイド（星芒形）となることは有名なので知っている人もいるでしょう．

（解答）

$P(4\cos\alpha, 0), Q(0, \sin\alpha)$ であるから，直線 PQ の方程式は，

$y = (-\tan\alpha)x + 4\sin\alpha \quad (0 \leqq x \leqq 4\cos\alpha \cdots ①)$

また，$2 \leqq 4\cos\alpha \leqq 4, \quad 0 \leqq 4\sin\alpha$ より，

$$\frac{1}{2} \leqq \cos\alpha \leqq 1 \cdots ② \qquad \therefore 0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{3}$$

次に x を固定したときの y のとり得る値の範囲を求める．

$f(\alpha) = -x\tan\alpha + 4\sin\alpha$

但し，$\dfrac{x}{4} \leqq \cos\alpha(①)$ 又は $\dfrac{1}{2} \leqq \cos\alpha \leqq 1(②)$

$f'(\alpha) = \dfrac{4}{\cos^2\alpha}\left(\cos^3\alpha - \dfrac{x}{4}\right)$

ここで，$\cos\alpha$ の最小値が $\dfrac{x}{4}$ となるか $\dfrac{1}{2}$ となるかで場合分けが生じることに注意する．

(i)$\dfrac{1}{2} \geqq \dfrac{x}{4}$(即ち $0 \leqq x \leqq 2$) のとき

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \geqq 0 = f(0)$

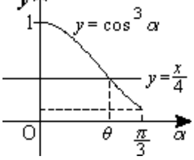
である．

（ア）$\dfrac{x}{4} \geqq \dfrac{1}{8}\left(\text{即ち}\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2\right)$ のとき

$f'(\alpha) = 0, 0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}$ なる α が存在し，

その α を θ とすると

$$0 \leqq y \leqq f(\theta)$$



α	0	$\cdots$	θ	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(\alpha)$		$+$		$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また，$f'(\alpha) = 0$ より，$x = 4\cos^3\theta$

$\therefore f(\theta) = -x\tan\theta + 4\sin\theta = 4\sin^3\theta$

（イ）$\dfrac{x}{4} \leqq \dfrac{1}{8}\left(\text{即ち } 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f'(\alpha) \geqq 0$ となり，$f(\alpha)$ は単調増加だから，

$$0 \leqq y \leqq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

(ii)$\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{x}{4}$(即ち $2 \leqq x \leqq 4$) のとき

$\dfrac{x}{4} \leqq \cos\alpha \leqq 1$ だから，$\dfrac{x^3}{64} \leqq \cos^3\alpha \leqq 1$ であり，

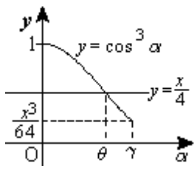
$\cos\alpha = \dfrac{x}{4}, 0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}$ なる α を γ とすると，

$f(\gamma) = -4\cos\gamma\tan\gamma + 4\sin\gamma = 0 = f(0)$

また，$\dfrac{x^3}{64} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x}{64}(x^2 - 16) \leqq 0$

$\therefore f'(\alpha) = 0, 0 \leqq \alpha \leqq \gamma$ をみたす α が存在し，その α を θ とすると，

$$0 \leqq y \leqq f(\theta)$$



α	0	$\cdots$	θ	$\cdots$	γ
$f'(\alpha)$		$+$		$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また，$f'(\alpha) = 0$ より，$x = 4\cos^3\theta$

$\therefore f(\theta) = -x\tan\theta + 4\sin\theta = 4\sin^3\theta$

(i),(ii) より，F の $x = 0, y = 0$ 以外の境界は，

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \begin{cases} x = 4\cos^3\theta \\ y = 4\sin^3\theta \end{cases} \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 4\right) \end{cases}$$

F の面積を S とする．

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{4} y\,dx$$

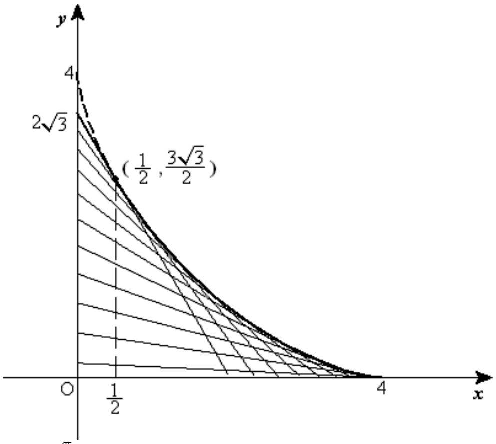
$x = 4\cos^3\theta$ だから，

$dx = -12\cos^2\theta\sin\theta d\theta$

x	$\frac{1}{2}$	$\to$	4
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\to$	0

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4} y\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 4\sin^3\theta(-12\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$



$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 48\sin^2\theta\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 48\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\dfrac{\sin^2 2\theta}{4}d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6(\sin^2 2\theta - \cos 2\theta\sin^2 2\theta)d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 - 3\cos 4\theta - 6\cos 2\theta\sin^2 2\theta)d\theta$

$= \left[3\theta - \frac{3}{4}\sin 4\theta - 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \pi + \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \pi$

$\therefore S = \dfrac{7\sqrt{3}}{8} + \pi$

＜参考＞

動点 P は xy 平面上 $y \geqq 0$ の部分に，動点 Q は x 軸上 $x > 0$ の部分にあり，原点を O として，$OP = OQ = \dfrac{1}{2}$ となるように動く．$\angle POQ = \angle OQP = \theta$ とおく．

α が動くとき，線分 PQ（両端を含む）の通り得る範囲を図示し，その面積を求めよ．

（略解）線分 PQ を表す式は

$y = -\tan\theta x + \sin\theta, \dfrac{1}{2}\cos\theta \leqq x \leqq \cos\theta$

$f(\theta) = -x\tan\theta + \sin\theta$ とおく．

$f'(\theta) = \dfrac{\cos^3\theta - x}{\cos^2\theta}$

$2x = \cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なる θ を α,

$x = \cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なる θ を γ とする．

(i)$x \geqq 8x^3$, 即ち $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき

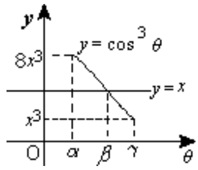
$f'(\theta) \leqq 0$ となり，$f(\theta)$ は単調減少だから，

$\quad 0 \leqq f(\theta) \leqq f(\alpha)$

$x = \dfrac{1}{2}\cos\alpha$ だから，$f(\alpha) = \dfrac{1}{2}\sin\alpha$

(ii)$x^3 \leqq x \leqq 8x^3$, 即ち $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ のとき

$x = \cos^3\theta \quad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ なる θ を β とおく．



θ	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\theta = \beta$ のとき $f(\theta)$ は最大値をとるから，

$\quad 0 \leqq y \leqq f(\beta)$

$x = \cos^3\beta$ なので

$f(\beta) = \sin^3\beta$

(iii)$x \leqq x^3$, 即ち $x \geqq 1$ のとき

$f'(\theta) > 0$ となり，$f(\theta)$ は単調増加だから，

$\quad 0 \leqq f(\theta) \leqq f(\gamma)$

$x = \cos\gamma$ なので

$f(\gamma) = 0$

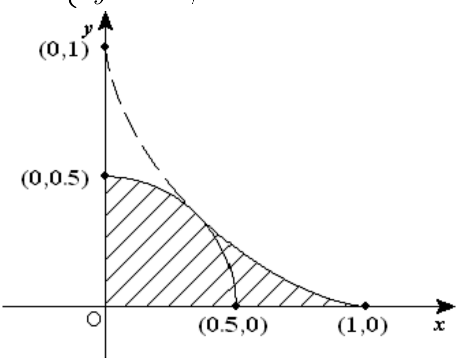
(i)〜(iii) より，

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ のとき

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\begin{cases} x = \cos^3\beta \\ y = \sin^3\beta \end{cases}$$



求める面積を S とすると，

$S = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{1}\sin^3\theta dx$

$= \cdots = \dfrac{5}{64}\pi$

【１４】

原点を O とする xy 平面上に，２つの動点 P, Q がある．

点 P は直線 $x=1$ 上を点 $(1,0)$ から点 $(1,\sqrt{3})$ まで動く．また，点 Q は線分 OP 上にあって，$OP \cdot QP = 1$ を満たしながら動く．このとき，線分 PQ が通過する部分の面積を求めよ．

<考え方>

線分の通過する領域を求める問題もやはり，存在条件を考えるのと同じですが，線分の場合，端点の動きのみをとらえて線分を実際に動かして求めることがしばしばあります．練１１まではなるべく動かして求めるのは避けてきましたが，線分の場合はまず第一に線分を実際に動かして様子をつかむのがよいです．このとき，端点が境界になるのであれば端点のみをとらえ，線分の途中の点が境界になるのであれば，存在条件を考えた方がよいことが多いです．本問は実際に動かしてみた（解答）にしましたが，あとからやってみたら，x 固定したときの y のとり得る値の範囲を求めても答えが出たので（別解）に載せてみました．

（解答）

線分 PQ を実際に動かしてみると，点 P, 点 Q の軌跡が線分 PQ が通過する部分の境界の一部になることがわかる．そして，P の座標は y 座標の値を t として $(1,t)$ と表せる．ただし，$0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$ である．

$OP \cdot QP = 1$ より，$QP = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\therefore OQ = OP - QP$

$= \sqrt{1+t^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

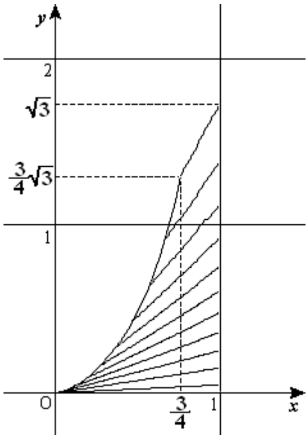
$A(1,0)$ とし，$\angle POA = \alpha$ とすれば，

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin\alpha = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ であり，

$Q(OQ\cos\alpha, OQ\sin\alpha)$ だから，

$Q\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$

線分 PQ を実際に動かして，線分 PQ の通過領域は下図の斜線部．



求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{t^3}{1+t^2}dx + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{t^3}{1+t^2}dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t^4}{(1+t^2)^3}dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\tan^4\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^3} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\tan^4\theta\cos^4\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^4\theta d\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 2\theta - 2\cos 2\theta + 1\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2} - 2\cos 2\theta + 1\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (3 + \cos 4\theta - 4\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{4}\left[3\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - 2\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{4}\left(\pi - \frac{\sqrt{3}}{8} - \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{9}{32}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{\pi}{4} - \frac{9}{32}\sqrt{3} + \frac{7}{32}\sqrt{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16}$$

補足

x を固定して，t を変化させたときの y のとり得る

値の範囲を直接求めることもできる．
（別解）
$P(1,t)$ としたとき，
線分 PQ は $y=tx \quad \left(\dfrac{t^2}{1+t^2} \leqq x \leqq 1, 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}\right)$
とあらわせる．$0 \leqq x < 1$ のとき，① より，

$$\frac{t^2}{1+t^2} \leqq x$$
$$t^2 \leqq x(1+t^2)$$
$$t^2(1-x) \leqq x$$
$$\therefore 0 \leqq t^2 \leqq \frac{x}{1-x}$$
$$\therefore 0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

よって t の範囲は，
$0 \leqq t \leqq \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ かつ $0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$
$f(t)=xt$ とおく．
今，$x \geqq 0$ だから，$f(t)$ は単調増加である．
(i)$\dfrac{x}{1-x} \leqq 3$，即ち $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき
t の範囲は
$0 \leqq t \leqq \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ であるから，

$$f(0) \leqq y \leqq f\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$$
$$\therefore 0 \leqq y \leqq x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

(ii)$3 \leqq \dfrac{x}{1-x}$，即ち $\dfrac{3}{4} \leqq x < 1$ のとき
t の範囲は
$0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$ であるから，

$$f(0) \leqq y \leqq f(\sqrt{3})$$
$$\therefore 0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$$

(iii)$x=1$ のとき
$y=t, 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$
(i)〜(iii) より，線分 PQ の通過領域は，
$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき　$0 \leqq y \leqq x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$
$\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq 1$ のとき　$0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$
である．

$$S=\int_0^{\frac{3}{4}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}=\sqrt{\frac{-(1-x)+1}{1-x}}=\sqrt{-1+\frac{1}{1-x}}$$

であるから，
$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき単調増加．
$\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=s$ とおくと，

$$x=\frac{s^2}{1+s^2}$$
$$dx=\frac{2s(1+s^2)-s^2\cdot 2s}{(1+s^2)^2}ds$$
$$\therefore dx=\frac{2s}{(1+s^2)^2}ds$$

x	0	$\to$	$\frac{3}{4}$
s	0	$\to$	$\sqrt{3}$

$$\therefore \int_0^{\frac{3}{4}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{s^2}{1+s^2}\cdot s\cdot\frac{2s}{(1+s^2)^2}ds$$
$$=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2s^4}{(1+s^2)^3}ds$$

後は（解答）と同じように積分計算していくだけ．

$\boxed{\text{補足の補足}}$

$$\int_0^{\frac{3}{4}} x\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

を求めるのは難しいと言う予備校講師もいますが，このぐらいの積分を出来ないようでは話になりません．計算力は日ごろから意識して訓練を積んでおくべきです．
x を固定して t を動かして y のとり得る値の範囲を求める場合，やはり重要になってくるのが t の変域です．まずは，そこに細心の注意を払って考えていきましょう．

【１５】

xy 平面上に四分円 $C: x^2+y^2=1 \quad (x \geqq 0, y \geqq 0)$ があり，長さ $\sqrt{3}$ の線分 AB は常に C に接するように動く．点 A を $y=0$ 上の $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲で動かすとき（ただし，$A(1,0)$ のとき $B(1,\sqrt{3})$ とする），線分 AB が通過する領域の面積を求めよ．

＜考え方＞

この問題はさすがに実際に動かしてみないとつらいです．端点が境界の一部となります．

（解答）

接点を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とおくと接線は，

$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$

$y=0$ とすると，

あきらかに $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ だから，

$x = \dfrac{1}{\cos\theta}$

よって，

$A\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right), B\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \sqrt{3}\sin\theta, \sqrt{3}\cos\theta\right)$

B と接点が一致するとき，

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - \sqrt{3}\sin\theta \\ \sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta \end{cases}$$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - 3\cos\theta$

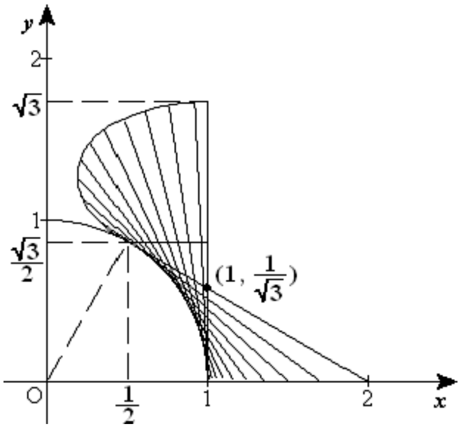
$4\cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2} \quad \left(\because 0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

あとは実際に線分 AB を動かしてみて，

線分 AB の通過領域は下図の斜線部．



点 B の軌跡を表す式は，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\theta} - \sqrt{3}\sin\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

よって，求める面積を S とすると，

$$S = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} (1-x)\,dy + \left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{25}{24}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} x dy$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} x dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\frac{1}{\cos\theta} - \sqrt{3}\sin\theta\right)(-\sqrt{3}\sin\theta)d\theta \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\right)d\theta \\ &= \left[-\sqrt{3}\log(\cos\theta) - \frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3}\log 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{25}{24}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \left(\sqrt{3}\log 2 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\log 2 \end{aligned}$$