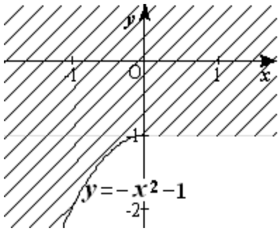
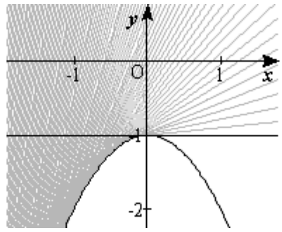
例２

> m が $m>0$ の値をとるとき，直線
> $$y=2mx+m^2-1\cdots①$$
> の通り得る範囲を次の３通りの方法で求めよ．
> (1)① を m の方程式と考える．
> (2)y を m の関数と考える．
> (3)m の値によらず，直線 ① が一定の放物線に接することを用いる．

（解答）(1)① $\Leftrightarrow m^2+2mx-y-1=0$
$f(m)=m^2+2mx-y-1$ とおく．
直線 ① が通り得る範囲を表す x,y の条件は，
m の二次方程式 $f(m)=0$ が $m>0$ の解を少なくとも一つもつための x,y の条件である．
$f(m)=(m+x)^2-x^2-y-1$ **（← x,y は定数！）**
（ア）$-x\leqq 0$（即ち $x\geqq 0$）のとき
　$f(0)<0$ であればよい．
　$f(0)=-y-1<0\Leftrightarrow y>-1$
（イ）$-x>0$(即ち $x<0$）のとき
　$f(-x)\leqq 0$ であればよい．
　$f(-x)=-x^2-y-1\leqq 0$
　$\Leftrightarrow y\geqq -x^2-1$
（ア）（イ）より，
$$\begin{cases} y>-1(x\geqq 0) \\ y\geqq -x^2-1(x<0)\end{cases}$$
(2)① $\Leftrightarrow y=m^2+2mx-1$
$g(m)=m^2+2mx-1$ とおく．
x を固定させ，$m(>0)$ を変化させたときの $g(m)$ のとり得る値の範囲を求める．
$g(m)=(m+x)^2-x^2-1$
（ア）$-x\leqq 0$ のとき　$g(m)>g(0)=-1$
（イ）$-x>0$ のとき　$g(m)\geqq g(-x)=-x^2-1$
（等号のつき方に注意！不安なら $x=0$ だけを別に扱ってもよい）
（ア）（イ）より，
$$\begin{cases} y>-1(x\geqq 0) \\ y\geqq -x^2-1(x<0)\end{cases}$$
(3)① $\Leftrightarrow m^2+2xm-y-1=0$
判別式を D とすると，少なくとも一つは ① を満たす m が存在しているので，
$$\frac{D}{4}=x^2+y+1\geqq 0\Leftrightarrow y\geqq -x^2-1$$
そこで，$y=-x^2-1$ と $y=m^2+2mx-1$ を連立させてみる．
$m^2+2mx-1=-x^2-1$
$x^2+2mx+m^2=0$
$(x+m)^2=0$
よって $x=-m$ の重解となるからここで接することがわかる．
$y=-x^2-1$ の $x=-m<0$ における接線を実際に動かして通過領域が求められる．





(3) を見ればわかるように，(1),(2) に比べ，しまりのない答案になっています．判別式から接する放物線を求めたのもなんだか怪しい．なんか偶然の産物に思えてきます．実は，接する放物線を求めるにはパラメータ m で微分するのが常套手段です．
$y=2mx+m^2-1\cdots①$
m で微分すると，$0=2x+2m$　$\therefore x=-m$
ここから $x=-m$ で接することがわかる．
① に代入して，
$y=2(-x)x+(-x)^2-1=-x^2-1$
なぜこれで上手くいくのかというと $\cdots$ 知りません．天下り的に教えてもらった記憶があります．大学の内容なのでしょう．だから，全面的にはそれを出さずに解答を書けばよい．個人的には，１，２のやり方で厳しいときのみ実際に動かしてやってみるようにしています．
　もう一つ補足しておくと，(1) では，m について実際に解いてもできます．

（略解）$m=-x\pm\sqrt{x^2+y+1}$
m は実数だから，$x^2+y+1\geqq 0$
$\therefore y\geqq -x^2-1\cdots(*)$
以下，$(*)$ の下で考える．
$m>0$ とすると，
$\sqrt{x^2+y+1}>x\cdots①$
または
$-x>\sqrt{x^2+y+1}\cdots②$
（ア）$x\geqq 0$ のとき
　① より，$x^2+y+1>x^2$
　$\therefore y>-1$
　また，② は成り立たない．
（イ）$x<0$ のとき
　① は常に成立．
　② より，$x^2>x^2+y+1$
　$\therefore y>-1$
以上合わせて
$$\begin{cases} y>-1(x\geqq 0) \\ y\geqq -x^2-1(x<0)\end{cases}$$

略解についてさらに補足を加えておきます．
　$x=0$ による場合分けをしているが，この理由

は大丈夫でしょうか．これは，① や ② で根号がついているので，２乗したいけど，両辺が正かどうかが分からないため，それを場合分けにより解消していることに由来します．このように，実際に解いて代入する場合，根号の扱い方に気を配らなければいけません．これが面倒だというので，高等学校では実際に解いてやるということはあまり指導されないようです．扱う式が対称式だったりして，うまく消せるような問題が多いです．しかし，現実問題，対称のあるものばかりではありません．面倒でも，このようなやり方もできるようにしておくべきでしょう．また，解いて代入する場合の利点として，思考力より計算力が必要とされるということがあります．私のような思考力のない人間，発想力のない人間の最後の頼りは計算力．計算は経験でカバーできるし，発想も必要としません．「計算に持ち込めばこっちのもの」という自信がつければ，自信をもって試験に挑めます．これほど強い武器は無いでしょう．