

もう怖くない！ 背理法



註1：このテキストは、両面印刷して冊子状にすることを想定してレイアウトされています。
講義中でよく「テキストの右ページ」という言葉が出てきますが、
それは両面印刷して左綴じにしたときの右ページ、つまり奇数ページを指します。
テキストをプリントアウトせずに受講する人は、その旨を理解しておいてください。

註2：基本的なレイアウトとして、左のページに問題を掲載し、
その下を、解答を書くスペースとしました。
右のページは【NOTES】とし、解答以外の知識をまとめる場所にしてあります。
最低限の知識は板書を写して見直せば済むような授業の構成にしてありますが、
講師が板書したこと以外でも、
必要と思われることはどんどん書き込んでいくようにしましょう。

第1講

背理法とは何か

～Story～

魔王城殺人事件

某年某月某日某時。魔界の最深部、魔王城。魔王の側近である竜人が、魔王の執務室のドアを叩いた。——が、反応がない。この時間、魔王は執務室で財政の処理をしているはずなのだが。胸騒ぎがする。返事を待たずにドアを開け部屋に入った竜人が見たものは……美しく輝く刃に胸を貫かれ絶命している魔王の姿だった。

すぐに探偵が呼ばれ、探偵が事件の捜査を開始した。容疑者として浮上したのは、遺体の第一発見者である竜人、魔王の妻、魔王の息子、そして偶然城に滞在していた勇者パーティ（勇者・賢者・戦士・僧侶）。

玉座の間に集められた容疑者一同が緊張の面持ちを並べる中、探偵が口を開いた。

「さて。このたびの事件の捜査は、非常に難航を極めました。主に城に徘徊する知能の低い魔物たちのせいですが。また、凶器となった刃物から指紋が検出されなかったのも痛かったですね。しかし、私の手にかかれば、解決できない事件などありません。結論から申しますと——犯人はあなたですね、勇者さん」

「そんな、言いがかりです」心外だ、という表情で勇者が言う。「だいたい、僕には魔王を殺害する動機が……いや、動機はありますが、機会がなかった」

「その通りです」と僧侶が口を添える。「城に入って玉座の間を目指していた私たちは、仕掛けられていた罠によって4人バラバラに分断されてしまいました。それに、玉座の間の鍵だって、私たちはまだ手に入れていなかったんですよ」

「いいえ、僧侶さん。それは違います」探偵は冷たく反論する。「事件現場は玉座の間ではない、魔王の執務室でした。パーティを分断され合流しようと城の中を探索していた勇者さんは、偶然にも執務室のドアを開いてしまったのです。そこにいたのは工作中的魔王。勇者さんはこれを機にと、単身魔王に挑み、結果、殺害に至った」

勇者はなおも探偵に反駁する。

「まるで筋が通っていません。だいたい、それなら、玉座の間を目指していた僕たちよりも、魔王が執務室にいるということを知っていた竜人さんや奥さん、娘さんの方が犯行は容易だと言えるのではありませんか？」

「いいえ。魔王さんの遺体には、身体の正面から刃物が突き立てられていました。部屋の中には魔法を使用した形跡も見られた。正面から争った証拠です。もしも犯人が身内の方々ならば、魔王が油断している隙に背後から殺害することが可能なはずですよ。わざわざ正面から勝負を挑む必要はない」

「ならば、犯人は俺だとも考えられるだろう」戦士が言った。「勇者にしか反応が不可能だということには、いまの話からはならないな」

「残念ながら」探偵は首を横に振る。「ご自分と勇者さんのレベルの差を考えてください、戦士さん。単身で魔王に打ち勝つステータスの持ち主は、勇者パーティの皆さんの中には、勇者さんしかいません」

「すべて状況証拠にすぎない！」勇者が声を荒げた。「だいたい、凶器のエクスカリバーからは指紋が検出されなかったんだらう。物証がないじゃないか」

「その通り、たしかに凶器から指紋は検出されませんでした。しかし——おかしいですね。私はこれまで凶器の“刃物”としか言っていないのに……あなた、どうしてそれが、聖剣エクスカリバーだということを知っていたのですか？ それを知り得るのは、遺体の第一発見者である竜人さんを除けば——直接魔王に手を下した犯人以外には、いないというのに」

「あ、ああ……っ！」

「もう一度お尋ねします。勇者さん——あなたが、この事件の犯人ですね？」

「僕は……僕は勇者だ。使命に従い魔王を討ったんだ。人間界の平和のために戦ったんだ！ それの何が悪い!？」

「どのような理由があれ——あなたがとった行動はただの殺人です。それ以上でも、それ以外でもない」

打ちひしがれて崩れ落ちる勇者。

～♪♪（悲しげなエンディングテーマが流れる）

《完》

第2講

否定の練習

問. 次の語句の否定を書きなさい。

(1) a は正の数である

(2) n は3で割り切れる

(3) すべての x で P が成り立つ

(4) $t > 0$ かつ $s \leq 3$

(5) $x \leq 6$ または $y > 1$

(6) 任意の y について Q となる

【NOTES】

☆覚えておくとい否定

すべての～で○○である	
AかつB	
AまたはB	
有理数	

【コラム：排中律について】

命題「Pである」とその否定「Pでない」は、常にどちらか片方だけが成り立つ、という決まりごと。「『Pである』と同時に『Pでない』もの、「『Pである』ではなく『Pでない』でもない」ものは存在しないというルール。このルールがあるので、背理法という証明方法は成立する。

つまり、「Pでない」と仮定して→矛盾（排中律に反する現象）を導けば→「『Pではない』ではない」といえる→よって、（排中律により）「Pである」といえる、というのが背理法の原理なのである。

第 3 講

例題 1

問. 素数が無限に存在することを証明しなさい。

【NOTES】

◎素数とは

◎素因数分解の存在

◎素因数分解の一意性

【コラム：背理法が有効な場面】

無限・無理数・「存在しない」こと……。

数学的に重要なトピックではあるものの、式で表して計算しづらい場合がある。そんなものを扱う証明問題で威力を発揮するのが、背理法である。無限を有限に、無理数を有理数に、「存在しない」を「存在する」に——否定を仮定してやることによって、ぐっと扱いやすくなるのだ。

高校生・大学受験生が押さえておくべき背理法が有効な場面は次のふたつ。すなわち、

- ①無理数の証明
- ②存在しないことの証明

である。

第4講

例題 2

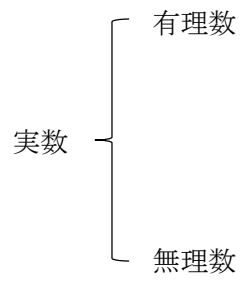
問. $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明しなさい。

類題

$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明しなさい。

【NOTES】

◎実数の分類



補講

$\sqrt{2}$ が無理数であることの別証明

問. $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明しなさい。

[NOTES]

第5講

練習問題 1

問. $2 - 7\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

類題

$\frac{2\sqrt{3}}{5}$ が無理数であることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることは、証明なしで用いてよい。

[NOTES]

第6講

練習問題 2

問. a, b を有理数とするとき、 $a + b\sqrt{2} = 0$ ならば、 $a = b = 0$ であることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

類題

p, q, r, s を有理数とする。 $p + q\sqrt{5} = r + s\sqrt{5}$ が成り立つとき、 $p = r$ かつ $q = s$ であることを証明しなさい。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

【NOTES】

【コラム：無理数だからこそ】

今回の問題で、もしも $\sqrt{2}$ を何か有理数、たとえば4に置き換えてみたらどうなるだろうか。少し考えるとわかるが、 $a + 4b = 0$ だからといって $a = b = 0$ だとはいえない。たとえば $a = -4, b = 1$ のとき、この式は成り立つ。左辺が無理数、右辺が有理数という式が作れるからこそ、この問題は成立するのだ。

なお、条件を少しいじって、「 $ax + by = c$ (ただし、 a, b, c は整数)の整数解を求めよ」とすると、数学Aの「整数の性質」で扱う一次不定方程式になる。

第7講

入試問題演習 1

問. xy 平面上の点 (a, b) は、 a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。 xy 平面において、3つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし、必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってよい。(1999 大阪大学)

第8講

入試問題演習 2

問. $\tan 1^\circ$ は有理数か。(2006 京都大学[後期])

おまけ

もっと知りたい人のために

講義を受けて興味を持った人のために、背理法を用いて証明できる数学的なトピックを紹介していきます。本当は補講その2として授業で扱うつもりでしたが、紙面での紹介にとどめることにします。(本編で「補講その1」と言っているのはそのせいです)

すべてのトピックに関して詳細を書くことはしません。ちゃんと知りたい人は、ネットで検索したり図書館に行ったり学校の先生に聞いてみたりして、それぞれの内容に向き合っ
てほしいと思います。

もちろん、以下で紹介するのはもはや「趣味の領域」になってくる内容なので、そればかりに夢中になって足元(=受験勉強)がおろそかにならないようにしてくださいね!

- ・素因数分解が存在することの証明
- ・素因数分解の一意性の証明

本編では「まあ、そうなるよね」ぐらいの扱いをしていましたが、実は、ある自然数に素因数分解が存在すること、また、その素因数分解は自然数1つにつきただ1通りであることは、厳密には自明でなく、証明が必要です。

いずれも、特定の自然数ではなく自然数一般についての証明なので、文字がたくさん並んで慣れないと目がちかちかしてきますが、論理の流れ自体は証明を丁寧に読めば理解できるはずです。

- ・無限降下法

補講の資料で紹介した、背理法のバリエーション。背理法と数学的帰納法の合わせ技の一種であるのとらえることもできます。「無限に降りていくことができる階段の存在を導けるのだが、そのような階段は存在しない」という証明方法。

$\sqrt{2}$ が無理数であることだけでなく、その他にも有効な場面が出てくる方法です。

・対角線論法

ここで、みなさんに質問です。自然数全体を、もれなく・だぶりなく、一列に並べることはできるでしょうか。——簡単にできますね。

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

のように順に並べればよい。では、整数全体ではどうでしょう。自然数の並べ方を少し応用して、

$$0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \dots$$

というふうに並べていけば可能です。それでは有理数全体はといえば、これも大丈夫。上の整数全体を並べたやり方を、分母の並べ方として、

$$0, +\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, +\frac{2}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$$

としてやればよい。それでは実数全体はというと……これを1列に並べることは不可能である。このことを証明したのが、ゲオルグ・カントール（1845-1918）です。証明の骨格は背理法なのですが、途中であるユニークな操作があり、それに由来して、ここで用いられた論理の流れは対角線論法と呼ばれます。

・フェルマーの最終定理

この定理は、

n を自然数とする。 $n \geq 3$ のとき、次の式を満たす自然数 x, y, z は存在しない。

$$x^n + y^n = z^n$$

という定理です。17世紀最大のアマチュア数学者（本業は弁護士！）であるピエール・ド・フェルマー（1608-1665）によって提唱されました。

ところがフェルマーは、「この定理に関して、私は真に驚くべき証明を見つけたが、この余白はそれを書くには狭すぎる」という台詞を残して（彼の数学の研究は、数学書の余白へのメモ書きでした）、定理を証明することなく死んでしまいます。

そして、360年もたって、1996年にアンドリュー・ワイルズ（1953-）の手によって最終的に証明されました。

証明の細部を理解することは、高校生のみなさんにとっては非常に困難でしょう。(どうか正直に言って僕もちゃんと理解できる部分は少ないです)

でも、証明全体の大まかな流れとしては、背理法が用いられています。

証明に 360 年もかかったことから、フェルマーの定理を追いかけるだけでも 3 世紀半分の数学の歴史が追えてしまうので、興味のある人はいつかはぜひ理解することに挑戦してほしい定理です。

なお、先ほどの「余白がない」という言い訳は、むろん、解けない証明問題の解答欄に書いたところでむなしくバツをつけられるだけです。気をつけましょう。

