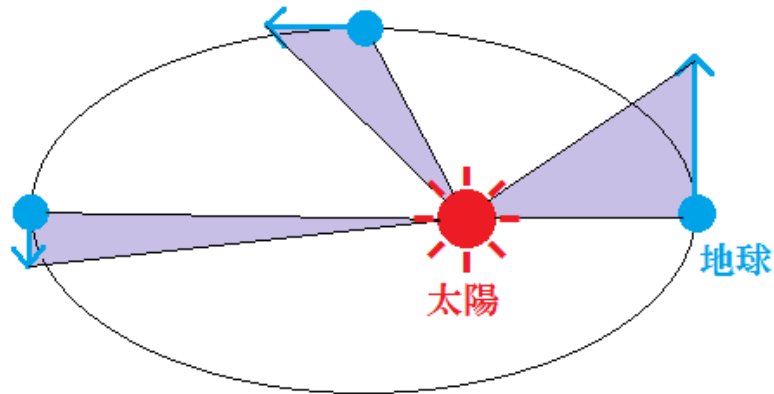


7. ケプラーの法則

1619年ドイツのケプラーによって、太陽系惑星の運動に関する法則が定式化された。これが「ケプラーの法則」であり、以下の3つのことが挙げられた。



I：太陽系惑星は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道上を運動する。

→ 楕円軌道のきっかけとなる天体は、その楕円軌道の焦点に必ず存在している。

II：惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に「切る」面積は、どこでも一定である。

→ 近日点での地球の速さと太陽からの距離を v_n, L_n とし、遠日点での地球の速さと太陽からの距離を v_f, L_f とすると、面積速度一定の法則から、以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}v_nL_n = \frac{1}{2}v_fL_f$$

近日点付近では速く、遠日点付近では遅い。

III：惑星の公転周期の2乗 T^2 と、楕円軌道の半長径の3乗 a^3 は比例関係にある。

$$T^2 = Ka^3$$

→ 共通の天体の回りを楕円運動している惑星や衛星（人工衛星も含む）であれば、これらにおける互いの定数 K の値は等しい。例えば、太陽系惑星における定数 K の値はすべて同じ値になる。これは太陽系惑星がすべて焦点にある太陽の周りを公転しているからである。

この楕円運動を支配する力は、太陽と地球の間に働く万有引力である。そのためこの法則は、太陽に限らず、太陽と惑星の間だけではなく、惑星と衛星(人工衛星)などの間でも成立する。

【7-例】神戸大学 2011 第 1 問

地球を周回する衛星の運動について、問 1~4 に答えなさい。ただし、万有引力定数は G 、地球の質量を M 、地球の中心を原点 O とする。

問 1 下図の破線のように、衛星が半径 R の円軌道上を運動するとき、衛星の加速度の向きと大きさを求めよ。さらに、その時の衛星の速度も求めよ。

→ なぜ衛星は原点 O を中心とした半径 R の円運動ができるのか。それは原点 O に向かって力が働いているためである。すなわち、円運動は加速度運動であり、その加速度をもたらす力は向心力である。この問題における向心力は万有引力に相当するので…。

問 2 問 1 の状態から衛星を進行方向に加速すると、衛星は楕円軌道に沿って周回するか、無限遠方に飛び去る。衛星が周回運動するための、加速直後の速さに対する条件を求めよ。

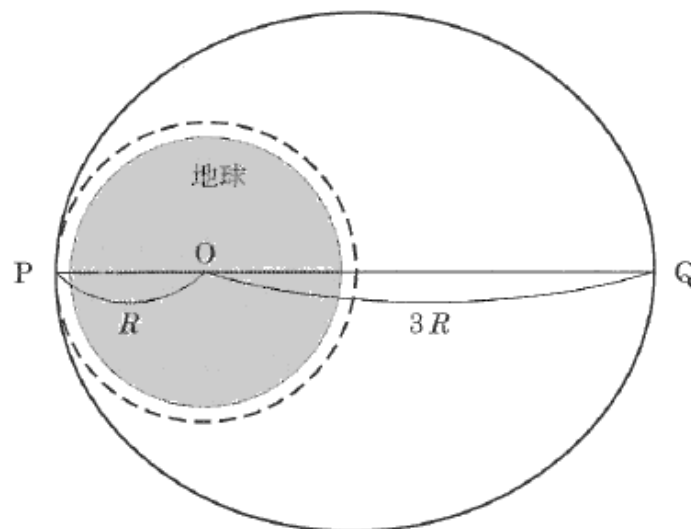
→ 「周回運動する」ということは、「無限遠方に飛んでいかない」ということである。仮に衛星が無限遠に飛んでいくのであれば、それ相応の運動エネルギー(速度)が必要である。

問 3 衛星が周回運動している時、その面積速度は一定である。衛星が下図中の実線のような楕円軌道を描いている時、地球に最も近い点 P と地球から最も離れた点 Q における衛星の速さの比を求めなさい。ただし $OP = R$ 、 $OQ = 3R$ である。

→ ケプラー第 2 法則より、点 P での面積速度と点 Q での面積速度は同値なので…。

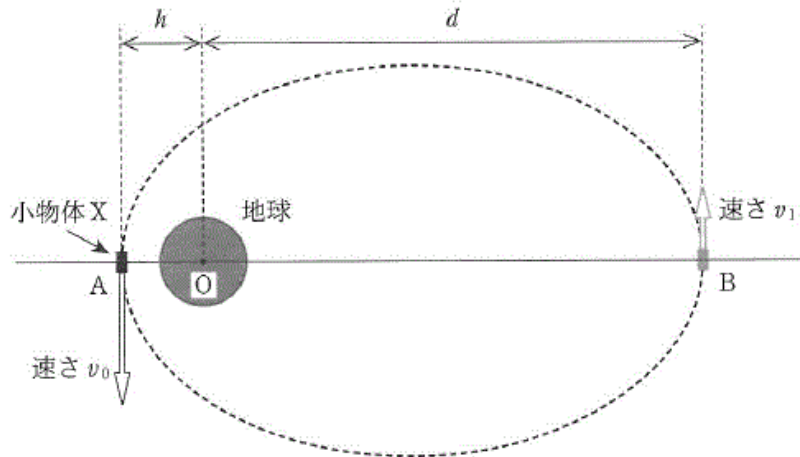
問 4 問 3 において、点 P における衛星の速さを求めよ。

→ 点 P と点 Q での力学的エネルギーは同値であることを利用せよ。



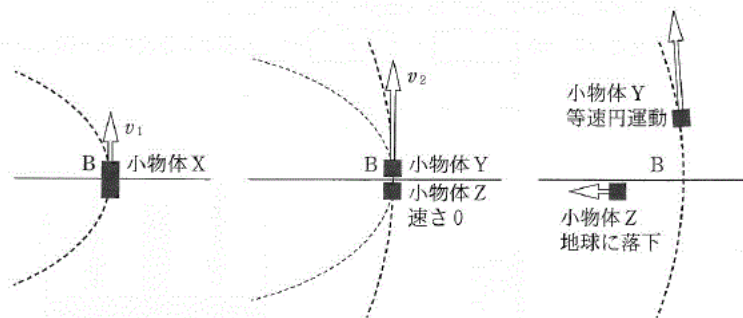
【7-1】 広島大学 2014 第 1 問

下図のように、質量 m の小物体 X を地球の中心 O から距離 h だけ離れた点 A から、OA に垂直な方向へ速さ v_0 で打ち出した。その後、小物体 X は点 O を焦点とする楕円軌道を描き、点 A と点 O を結ぶ直線上で点 O から距離 $d(> h)$ だけ離れた点 B に速さ v_1 で到達した。軌道上で点 B は点 O から最も離れている。地球の質量を M 、万有引力定数を G とする。 h は地球の半径より大きいものとする。また、地球の大气、自転及び公転の影響、地球以外の天体による重力は無視できるものとし、以下の問いに答えよ。



問 1 速さ v_0 を、 M, G, h, d を用いて表せ。

下図のように、小物体 X は点 B に到達した瞬間、質量 $m/2$ の小物体 X, Y に分解した。分解直後の小物体 Y の速さは v_2 で、運動の方向は楕円軌道の接線方向であった。一方、分解直後の小物体 Z の速さは 0 であった。小物体 Y は点 O を中心とする半径 d の円運動を描いて運動し、小物体 Z は線分 OB に沿って地球に落下した。小物体 X, Y の間の万有引力は無視できる。



問 2 円運動する小物体 Y の速さ v_2 と周期 T を、 M, G, d を用いてそれぞれ求めよ。

問 3 小物体 Y の軌道半径 d と h の比を求めよ。

問 4 小物体 X が点 B において分解せず、そのまま楕円軌道を描き運動する場合の周期を T' とする。ケプラーの第 3 法則を用いて、 T と T' の比を求めよ。

【7-2】 慶應義塾大学理工学部 2009 第 1 問

人工衛星が地表すれすれを等速円運動するとき、その速さ v は第一宇宙速度と呼ばれる。一方、地表から打ち上げた人工衛星が無限遠方まで飛び去るために必要な最低速度を第二宇宙速度と呼ぶ。ただし、地球の質量を M 、万有引力定数を G 、半径を R とする。

問 1 第一宇宙速度 v の値はいくらか。

問 2 第二宇宙速度は、第一宇宙速度の何倍か求めよ。

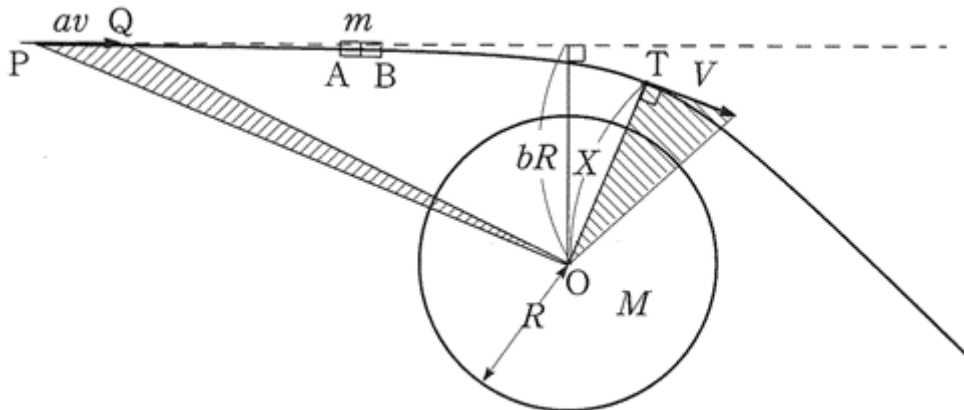
下図のように、宇宙船が地球の重力の作用だけで地球に戻ることを考える。質量 m の宇宙船の速さは、地球から遠く離れた点 P において第一宇宙速度の a 倍の速さ av である。点 P では地球からの万有引力を無視できる。点 P での宇宙船の軌道を延長した直線と中心 O との距離を半径 R の b 倍とする(ただし b は正)。その後、宇宙船が地球に近づくと、万有引力のためにその軌道は地球 O に向かって曲げられる。地球に最も近づく位置を点 T として、距離 OT を X 、点 T での宇宙船の速さを V とする。

問 3 点 P と点 T における宇宙船の力学的エネルギー、面積速度をそれぞれ求めよ。

以下では、宇宙船が地球をかすめるように、速さ V_0 で通過する場合を考える。このとき最接近距離は地球の半径であるから、 $X = R$ である。しかし、この速さ V_0 は第二宇宙速度より大きいため、宇宙船は地球をかすめた後、無限遠方に飛び去ってしまう。そこで、最接近点で宇宙船の一部分 B を進行方向前方に打ち出して、残りの部分 A に地表すれすれの等速円運動をさせた。分裂後の A と B の質量が等しいとする。

問 4 最接近点での速さ V_0 を求めよ。

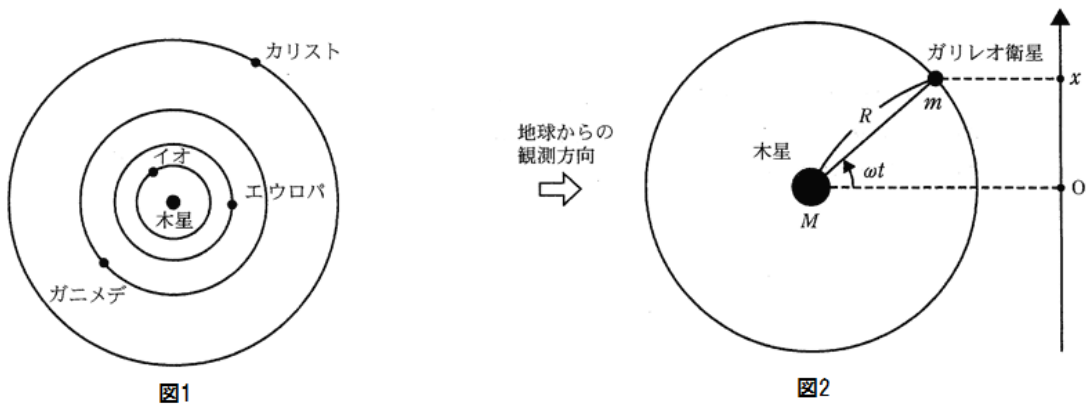
問 5 A からみた B を打ち出す速さは、 V_0 と v を用いてどのように表されるか求めよ。



【7-3】 岡山大学 2006 第 4 問

ガリレオ・ガリレイは、1610 年に木星が 4 つの衛星を持つことを発見した。図 1 に示すように、軌道の内側からイオ、エウロパ、ガニメデ、カリストの 4 つのガリレオ衛星と呼ばれるものである。3 年 A 組では、課題研究として望遠鏡を用いてこれらのガリレオ衛星の運動を観測し、木星の質量を求めた。

図 2 に示すように、質量 M の木星のまわりを、質量 m のガリレオ衛星が等速円運動をしているものとする。衛星の軌道半径を R 、角速度を ω 、公転周期を T とする。



問 1 衛星の運動を軌道面の真横から観察したとすると、その正射影の変位 x はどのように表されるか。ただし $t = 0$ のとき、衛星の正射影は原点 O にあった。

問 2 衛星は、円の中心すなわち木星に向かって向心力を受けている。万有引力定数を G とすると、この向心力の大きさはいくらか。また、下のケプラー第 3 法則の式中の C に当てはまる数式を求めよ。

$$T^2 = CR^3$$

次にガリレオ衛星を望遠鏡で 10 日間観測し、問 1 で示した式を参考に T と R を分析すると、次の表が完成した。これより、半径の 3 乗を横軸に、周期の 2 乗を縦軸にとったグラフを描け。また、上式の C の値を用いて、木星の質量を有効数字 2 桁で求めよ。

衛 星	R [m]	T [s]	R^3 [m ³]	T^2 [s ²]
イ オ	4.2×10^8	1.5×10^5	0.074×10^{27}	0.023×10^{12}
エウロパ	6.7×10^8	3.1×10^5	0.30×10^{27}	0.096×10^{12}
ガニメデ	11×10^8	6.2×10^5	1.3×10^{27}	0.38×10^{12}
カリスト	19×10^8	14×10^5	6.9×10^{27}	2.0×10^{12}

$$G = 6.67 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2], \pi^2 = 9.9 \text{ する。}$$